ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 23 | April 1943 | Heft 2

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Über eine Schwingungserscheinung in Flüssigkeiten mit stabiler Dichteschichtung.

Von *H. Görtler* in Göttingen.

(Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Die Theorie der erzwungenen kleinen Schwingungen in einer der Schwerkraft unterworfenen reibungslosen Flüssigkeit mit stabiler Dichteschichtung führt zur Voraussage einer neuartigen Schwingungserscheinung: Die Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Verschiebungsamplituden zeitlich harmonischer Schwingungen als Funktionen der Ortskoordinaten ist für Frequenzen unterhalb eines von der jeweiligen Dichteschichtung abhängigen kritischen Werts vom hyperbolischen Typ. Demgemäß treten Regularitätsdefekte dieser Größen an einem Orte zugleich in allen Punkten der durch diesen Ort gehenden reellen Charakteristiken der Differentialgleichung auf. In einfachen Experimenten läßt sich diese Erscheinung beobachten. Die theoretischen Gesetzmäßigkeiten des Charakteristikenverlaufs im einzelnen erfahren dabei ihre Bestätigung.

§ 1. Einleitung.

Kleine Schwingungen in reibungslosen, der Schwerkraft unterworfenen Flüssigkeiten oder Gasen mit in der Ruhelage horizontaler und stabiler Dichteschichtung sind mehrfach theoretisch untersucht worden[1]). Man interessierte sich vorwiegend für das Problem der Wellenausbreitung in solchen Medien mit teilweise festen oder freien Berandungen. Auf diese Untersuchungen soll hier nicht näher eingegangen werden. Die vorliegende Betrachtung gründet sich auf einen bemerkenswerten mathematischen Sachverhalt bei den Bewegungsgleichungen zeitlich harmonischer Schwingungen, dem bisher merkwürdigerweise nicht die verdiente Beachtung geschenkt worden ist. Dies überrascht um so mehr, als bereits durch sehr einfache und naheliegende Schlußfolgerungen aus diesem Sachverhalt theoretische Vor-

[1]) Genannt seien: Lord Rayleigh: Investigation on the character of the equilibrium of an incompressible heavy liquid of variable density. Proc. Lond. Math. Soc. Bd. 14 (1883), S. 170; W. Burnside: On the small wave-motions of a heterogeneous fluid under gravity. Proc. Lond. Math. Soc. Bd. 20 (1889), S. 392; A. E. H. Love: Wave motion in a heterogeneous heavy liquid. Proc. Lond. Math. Soc. Bd. 22 (1891), S. 307; H. Lamb: On the theory of waves propagated vertically in the atmosphere. Proc. Lond. Math. Soc (2) Bd. 7 (1909), S. 122; On atmospheric oscillations. Proc. Roy. Soc. Bd. 84 (1911), S. 551; S. Sano: Some problems on waves propagating in air at an uniform temperature. Bull. Central. Meteorol. Observatory, Japan, Bd. 2 (1913), S. 157. Siehe ferner: V. Bjerknes, J. Bjerknes, H. Solberg und T. Bergeron: Physikalische Hydrodynamik. Berlin 1933 (Achtes Kapitel) und H. Lamb: Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsch von E. Helly. 2. Aufl., Leipzig und Berlin 1931, S. 423 bis 425.

Den Hinweis auf die Arbeit von S. Sano verdanke ich Herrn H. Ertel.

aussagen über eine Schwingungserscheinung hergeleitet werden können, für welche m. W. experimentelle Belege noch nicht vorliegen. In einfachen Versuchen konnte, worüber im folgenden ebenfalls berichtet werden soll, diese Erscheinung nachgewiesen werden, und es wurden dabei die Voraussagen der Theorie auch quantitativ bestätigt.

Fragen über die Schwingungsvorgänge im einzelnen sollen in dem vorliegenden Bericht weder von theoretischer noch von experimenteller Seite erörtert werden. Das Studium der Bewegungsformen soll vielmehr einer späteren ausführlichen Untersuchung vorbehalten bleiben.

§ 2. Problemstellung.

Wir beziehen die folgenden Rechnungen auf ein cartesisches Rechtssystem x, y, z, dessen positive z-Achse vertikal nach oben weist. In bezug auf dieses System sei die Dichte ϱ_0 einer reibungslosen, volumbeständigen, der Schwerkraft unterworfenen und in der Gleichgewichtslage befindlichen Flüssigkeit eine reine Funktion von z[2]):

$$\varrho_0 = \varrho_0(z) \quad \ldots \quad (2.1).$$

Von der durch diese Funktion festgelegten Dichteschichtung wollen wir ferner ausdrücklich voraussetzen, daß sie nirgends eine instabile Gleichgewichtsanordnung darstellt. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß $\varrho_0(z)$ im Definitionsbereich mit wachsendem z nirgends zunimmt[3]), d. h., daß für alle z gilt:

$$\varrho_0'(z) \leqq 0 \quad \ldots \quad (2.2).$$

Durch äußere Einwirkung, etwa durch die Bewegung eines in die Flüssigkeit eingetauchten oszillierenden Körpers, möge die Flüssigkeit in zeitlich harmonische Schwingungen versetzt werden. Von den dadurch verursachten synchronen periodischen Teilchenverschiebungen ξ, η, ζ in x- bzw. y-, z-Richtung sowie von den zugehörigen Druck- und Dichteänderungen und auch von den räumlichen und zeitlichen Ableitungen dieser Größen setzen wir voraus, daß sie hinreichend klein sind, um eine Linearisierung der hydrodynamischen Bewegungsgleichungen bezüglich dieser Größen zu gestatten.

Wenn ein Flüssigkeitsteilchen aus der Gleichgewichtslage in Höhe $z-\zeta$ in die Höhe z verlagert wird, hat es, da es voraussetzungsgemäß volumbeständig sein soll, gegenüber der dort nach (2.1) definierten Ruhedichte $\varrho_0(z)$ die Dichte $\varrho(z) = \varrho_0(z-\zeta)$. Für diese können wir auf Grund der vorausgesetzten Kleinheit der Verschiebung ζ mit hinreichender Näherung

$$\varrho(z) = \varrho_0(z) - \zeta\,\varrho_0'(z) \quad \ldots \quad (2.3)$$

setzen.

Die bezüglich der Störungsgrößen linearisierten Bewegungsgleichungen lauten demnach:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_0\,\xi_{tt} &= -p_x \\ \varrho_0\,\eta_{tt} &= -p_y \\ \varrho_0\,\zeta_{tt} &= -p_z - g\,\varrho_0 + g\,\varrho_0'\,\zeta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2.4).$$

Hierin bezeichnen p den statischen Druck und g die Erdbeschleunigung, während die Indizes x, y, z, t partielle Ableitungen nach den Ortskoordinaten bzw. nach der Zeit anzeigen.

Als vierte Bestimmungsgleichung tritt die Kontinuitätsgleichung hinzu:

$$\xi_x + \eta_y + \zeta_z = 0 \quad \ldots \quad (2.5).$$

Es bezeichne nunmehr die reelle Größe β die Kreisfrequenz der kleinen Schwingungen. Wir können uns darauf beschränken, β als nicht negativ anzunehmen. Dann setzen wir an:

$$\left.\begin{aligned} &\xi = e^{i\beta t}\,X(x,y,z), \qquad \eta = e^{i\beta t}\,Y(x,y,z), \qquad \zeta = e^{i\beta t}\,Z(x,y,z) \\ &p = p_0 - g\int_{z_0}^{z} \varrho_0\,\mathrm{d}z + \varrho_0\,e^{i\beta t}\,P(x,y,z) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2.6)$$

(p_0 = statischer Druck im Gleichgewichtszustand in der Höhe $z = z_0$).

§ 3. Theoretische Voraussagen für ein einfaches Beispiel.

Nunmehr soll mit Rücksicht auf die in § 4 zu schildernden Experimente zunächst eine einfache Schichtung ins Auge gefaßt werden. (Die entsprechende Behandlung des allgemeinen Falls folgt erst in § 5.) Es sei nämlich

$$\varrho_0 = \varrho_1\,e^{-z/h} \quad \ldots \quad (3.1)$$

---

[2]) Grundsätzlich setzen wir voraus, daß ϱ_0 sowie die im weiteren eingeführten Funktionen und ihre sämtlichen vorkommenden totalen bzw. partiellen Ableitungen im jeweils zugrunde liegenden Bereich stetig, oder, wo dies ausdrücklich gesagt wird, stückweise stetig sind.

[3]) Lord Rayleigh: a. a. O.

(h eine feste Länge, $\varrho_1 = \varrho_0(0)$). Ferner beschränken wir uns aus demselben Grunde auf zweidimensionale Bewegungen, indem wir annehmen, daß $Y \equiv 0$ ist und daß demzufolge X, Z und P von y nicht abhängen. Dann führt der Ansatz (2.6) in (2.4) und (2.5) eingesetzt auf die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\beta^2 X - P_x = 0 \\ &\left(\beta^2 - \frac{g}{h}\right) Z - P_z + \frac{1}{h} P = 0 \\ &X_x + Z_z = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3.2).$$

Die Koeffizienten sind in diesem Falle durchweg Konstante. (Sie sind dies auch **nur** in dem gewählten Sonderfall des Schichtungsgesetzes (3.1).) Bezeichnet L die Determinante des homogenen Gleichungssystems (3.2) für die Unbekannten X, Z und P im Sinne der Operatorenrechnung:

$$\left.\begin{aligned} L &= \begin{vmatrix} \beta^2, & 0, & -\partial/\partial x \\ 0, & \beta^2 - g/h, & -\partial/\partial z + 1/h \\ \partial/\partial x, & \partial/\partial z, & 0 \end{vmatrix} \\ &= (\beta^2 - g/h)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \beta^2/h \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3.3),$$

so ergibt der Eliminationsprozeß aus den Gleichungen (3.2)

$$L[X] = 0, \quad L[Z] = 0, \quad L[P] = 0 \quad \ldots \quad (3.4).$$

Der lineare Differentialoperator zweiter Ordnung L hat nun die bemerkenswerte Eigenschaft, für

$$\beta^2 \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} g/h \begin{Bmatrix} \text{elliptisch} \\ \text{parabolisch} \\ \text{hyperbolisch} \end{Bmatrix} \quad \ldots \quad (3.5)$$

zu sein. Dies gilt jeweils einheitlich für alle Stellen des flüssigkeitserfüllten Raumes. Die Charakteristiken von L sind, da dieser Differentialausdruck konstante Koeffizienten besitzt, gerade Linien, und zwar bilden sie die zwei Geradenscharen:

$$\beta x \pm \sqrt{g/h - \beta^2}\, z = \text{const.} \quad \ldots \quad (3.6).$$

Sie stellen im hyperbolischen Fall ($\beta^2 < g/h$) zwei reelle Parallelbüschel dar, deren Neigungswinkel φ gegen die x-Achse der Beziehung

$$\sin \varphi = \beta/\beta_k \quad \ldots \quad (I)$$

genügt. Hierin ist β_k die für jede Schichtung (3.1) in der ganzen Flüssigkeit konstante „**kritische Kreisfrequenz**"

$$\beta_k = \sqrt{g/h} \quad \ldots \quad (II)$$

des parabolischen Grenzfalls. Es ist dies die Frequenz eines mathematischen Pendels der Länge h, wo h nach (3.1) den Höhenabstand zweier im Dichteverhältnis $e:1$ stehenden Schichten darstellt.

Faßt man nacheinander verschiedene feste, in ihrer Aufeinanderfolge von Null an wachsende Frequenzen $\beta \leqq \beta_k$ ins Auge, so verlaufen die zugehörigen reellen charakteristischen Geraden immer steiler, um schließlich für die kritische Frequenz $\beta = \beta_k$ in den Vertikalen $x = \text{const.}$ paarweise zur Deckung zu kommen. Für $\beta > \beta_k$ bilden die charakteristischen Geraden zwei imaginäre Geradenbüschel.

Nun sind die Charakteristiken einer linearen hyperbolischen Differentialgleichung dadurch ausgezeichnet, daß längs dieser reellen Linien **Regularitätsdefekte** der Lösungen auftreten können[*]. In Anwendung auf das vorliegende Problem kann es somit in der ge-

[*]) Mathematisch sind die Charakteristiken zunächst als Ort möglicher Unstetigkeiten in den zweiten (oder höheren) Ableitungen stetiger und stetig differenzierbarer Lösungsfunktionen der Differentialgleichung ausgezeichnet. Über die Frage, unter welchen zusätzlichen Bedingungen die Charakteristiken auch als Ort möglicher Unstetigkeiten der Lösungsfunktion selbst oder von deren ersten Ableitungen mathematisch ausgezeichnet sind — wenn keine weiteren Forderungen gestellt sind, können solche Unstetigkeiten im Gegensatz zu denen höherer Ableitungen ja längs beliebiger Kurven auftreten — findet man gewissen Aufschluß in: R. Courant und D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik, Bd. 2. Berlin 1937, S. 359 ff. Es genügt, daß die unstetigen Lösungen Grenzfälle von Lösungen mit stetigem Verhalten sind. Es leuchtet daher vom physikalischen Standpunkt ein, daß die Charakteristiken auch in dieser Hinsicht eine ausgezeichnete Rolle spielen werden.

schichteten Flüssigkeit gewisse Linien geben, längs denen die physikalischen Größen, welche der Differentialgleichung (3.4) genügen, und aus ihnen abgeleitete Größen Unstetigkeiten besitzen. Es muß hier jedoch betont werden, daß unsere Theorie insofern eine Idealisierung darstellt, als die stets vorhandene Zähigkeit der Flüssigkeit vernachlässigt worden ist. Die als möglich erkannten mathematischen Unstetigkeiten der Theorie können ihre physikalische Verwirklichung nur unter einer entsprechenden Modifizierung finden.

Es erscheint angebracht, vor jeder weitergehenden theoretischen Erörterung, insbesondere vor expliziter Lösung einzelner Randwertprobleme, zunächst einmal das Experiment zu befragen. Wir werden untersuchen, was sich ergibt, wenn die erzwungenen zeitlich harmonischen Schwingungen durch einen in die geschichtete Flüssigkeit eingetauchten oszillierenden Körper verursacht werden. Wir können nach der Theorie jedenfalls erwarten, daß für Frequenzen $\beta < \beta_k$ Schwingungsvorgänge stattfinden werden, welche von dem bei homogenen Flüssigkeiten gewohnten Bild völlig abweichen, und zwar wird die Bewegung in einer Form erfolgen, daß dabei von der Körpernachbarschaft als Quelle lokaler Störungen (Ausweichströmung) ausgehende Linien das Bewegungsbild aufteilen. In besonders einfacher Weise kann man örtliche Unregelmäßigkeiten im Verlauf des Dichtegradienten als Schlieren in Schattenbildern sichtbar machen. Treten solche Schlieren auf, so können wir an ihnen ohne irgendwelchen größeren experimentellen Aufwand die quantitative Gültigkeit der Gesetze (I) und (II) nachprüfen. Der Bericht über die experimentelle Bestätigung dieser Aussagen bildet den Inhalt des folgenden § 4. Was jedoch im einzelnen in der Flüssigkeit vor sich geht, soll, wie bereits einleitend bemerkt, erst in einer späteren ausführlichen Arbeit theoretisch und experimentell untersucht werden.

Es mögen hier noch einige ergänzende Bemerkungen Platz finden, die auf das Auftreten der besonderen Frequenz β_k, der kritischen Frequenz unserer erzwungenen Schwingungen, bei anderen Fragestellungen und auf eine Verallgemeinerung Bezug nehmen.

Die Frequenz $\beta_k = \sqrt{g/h}$ tritt bei V. Bjerknes und Mitarbeitern a. a. O. und auch schon bei Lord Rayleigh a. a. O. auf mit der Bedeutung der Frequenz möglicher „Transversalwellen" (horizontal sich fortpflanzende harmonische ebene Wellen, bei denen die einzelnen Massenteilchen vertikal schwingen) in einem inkompressiblen Medium mit der Massenverteilung einer isothermen Atmosphäre. Ein solches Medium besitzt gerade eine dem Gesetz (3.1) genügende Schichtung, wobei hier h die Höhe der gleichförmigen Atmosphäre, also 8 km, ist. Als kritische Periode $T_k = 2\pi/\beta_k$ eines solchen Mediums in unserem Sinne ergibt sich $T_k = 3$ Minuten. Alle langsameren Perioden liefern demnach die Möglichkeit des Auftretens reeller Unstetigkeitslinien.

In der bereits zitierten Arbeit von S. Sano, in welcher die Wellenausbreitung in einer isotherm geschichteten, adiabatisch kompressiblen Atmosphäre untersucht wird, wird die fundamentale Rolle einer Fallunterscheidung analog (3.5) zwar erkannt, jedoch wird von der von uns oben gefolgerten Möglichkeit kein Gebrauch gemacht. Ohne den Charakteristikenbegriff heranzuziehen, gibt Sano zwar partikuläre Integrale seines Schwingungsproblems an, welche auf bestimmten Flächen (Ebenen, Kegel) — es sind gerade Charakteristikenflächen! — unendlich werden. Ich entnehme der Sanoschen Arbeit, daß in diesem Falle bei qualitativ gleicher Erscheinung — denn auch hier handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten — unsere kritische Frequenz durch $\beta_k = \sqrt{\varkappa - 1}\, g/c$ gegeben ist ($\varkappa = c_p/c_v$, $c = \sqrt{\varkappa R T}$ Schallgeschwindigkeit), also, anders geschrieben, $\beta_k = \sqrt{g/h_a}$, wo $h_a = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} h_g$ die Höhe der adiabatischen Atmosphäre (h_g Höhe der gleichförmigen Atmosphäre) ist, so daß sich also hier mit $T = 273°$ und $\varkappa = 1{,}41$, also $h_a \approx 28$ km, eine kritische Periode $T_k = 2\pi/\beta_k \approx 5\,^1/_2$ Minuten ergibt. (Die Periode tritt natürlich auch wieder als „Transversalperiode" bei V. Bjerknes und Mitarbeitern (s. oben) auf.)

Bemerkenswert ist, daß uns diese Periode auch in einem anderen Zusammenhang begegnet, nämlich in der Theorie der Leewellen hinter einem Gebirgskamm in einer isotherm geschichteten Atmosphäre nach G. Lyra[5]). Die Wellenlänge dieser Leewellen ist hinreichend weit hinter dem Berg mit guter Näherung durch $\lambda = 2\pi\bar{u}\,c/\sqrt{\varkappa - 1}\, g$ ($\bar{u}$ = ungestörte Anströmgeschwindigkeit $\ll c$) gegeben. Ein Massenteilchen mit der mittleren Geschwindigkeit $\bar{u}$ führt somit um eine mittlere horizontale Bahn Schwingungen mit der Kreisfrequenz $\beta_k = \sqrt{\varkappa - 1}\, g/c$ aus.

[5]) G. Lyra: Über den Einfluß von Bodenerhebungen auf die Strömung einer stabil geschichteten Atmosphäre. Beitr. Phys. d. fr. Atm. Bd. 26 (1940), S. 197; Theorie der stationären Leewellenströmung in freier Atmosphäre. Z. angew. Math. Mech. Bd. 23 (1943), S. 1. Für beliebige polytropische Schichtung findet sich die entsprechend allgemeinere Frequenzformel der Leewellen übrigens, wie mir Herr G. Lyra mitgeteilt hat, bereits bei P. Raethjen: Das zweidimensionale atmosphärische Stromfeld um ein Hindernis. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 17 (1926), S. 185 und bei F. Linke: Zur Vertikalbewegung isolierter Luftmassen. Meteor. Z. Bd. 45 (1928), S. 255.

§ 4. Experimentelle Bestätigung der Voraussagen von § 3.

Die gewählte einfache Versuchsanordnung[6]) zeigt Bild 1 (s. Bildtafel). Der Flüssigkeitsbehälter (Bodenabmessungen $20{,}2 \times 7{,}6\ \text{cm}^2$) wurde mit einer Kochsalzlösung gefüllt, wobei wegen der Einfachheit der Herstellung eine lineare Dichteabnahme mit der Höhe zwischen den Grenzen $\varrho_0 = 1$ und maximal $\varrho_0 = 1{,}19$ (konzentrierte Salzlösung) gewählt wurde:

$$\varrho_0(z) = \varrho_1 - \frac{z}{H}(\varrho_2 - \varrho_1) \quad \ldots \ldots \quad (4.1)$$

($z = 0$ Flüssigkeitsoberfläche bei Ruhe, ϱ_1 Dichte an dieser Oberfläche, ϱ_2 Dichte am Boden, H Höhe der Flüssigkeitsschicht). Diese kann wegen der Kleinheit der erreichbaren Dichtedifferenz $\varrho_2 - \varrho_1$ ($\leqq 0{,}19$) als hinreichende Approximation des Dichtegesetzes (3.1)

$$\varrho_0(z) = \varrho_1 e^{-z/h} = \varrho_1 \left\{1 - \frac{z}{h} + \cdots\right\}$$

angesehen werden, wenn hierin

$$h = \varrho_1 H/(\varrho_2 - \varrho_1) \quad \ldots \ldots \quad (4.2)$$

gesetzt wird. (Diese Approximation ist um $z = 0$ am besten. Die Ermittlung des Winkels φ wird im folgenden im Gebiet der oberen Schichten vorgenommen werden.)

Es wurde jeweils zunächst die Schicht geringster Dichte durch ein Zuleitungsröhrchen in das Gefäß eingelassen, daraufhin die nächst dichtere Schicht durch das Röhrchen langsam auf den Boden geleitet, wo es sich gleichmäßig unter die erste Schicht ausbreitete usf. Jeweils wurden etwa 10 Schichten gleicher Höhe eingebracht, und es wurde dann abgewartet, bis deren Grenzen sich durch Diffusion hinreichend verwischt hatten. Vor dem Versuch wurde dann die Dichteverteilung durch Einlassen von Tropfen eines Gemisches von Xylol und Äthylenbromid in geeigneten Mischungsverhältnissen nachgeprüft, die jeweils in einer ihrer eigenen Dichte entsprechenden Höhe zur Ruhe kommen.

Die zweidimensionalen Schwingungen wurden in der ersten Versuchsreihe durch die in Bild 1 sichtbare, vertikal gestellte rechteckige Platte als Störkörper verursacht, welche senkrecht von Wand zu Wand quer durch die Breite des Gefäßes reichte und leicht in die Flüssigkeit eintauchte (etwa 0,6 cm). Diese Platte wurde durch einen in der Skizze nicht wiedergegebenen Antriebsmechanismus in waagrechte harmonische Schwingungen senkrecht zu ihrer Ebene (und damit senkrecht zur Zeichenebene von Bild 1) versetzt. Als Amplitude dieser Oszillationen wurde zunächst 0,16 cm gewählt.

Bild 2 (s. Bildtafel) zeigt die beobachtete Erscheinung in einer Auswahl von sechs Schlierenaufnahmen (Schattenaufnahmen, s. Bild 1) aus einer Versuchsreihe mit $H = 3{,}75$ cm, $\varrho_1 = 1{,}00$ und $\varrho_2 = 1{,}19\ g\,\text{cm}^{-3}$ ($h = 19{,}7$ cm), und zwar mit den dort angegebenen Frequenzen in aufsteigender Folge. Dabei ist hier und im folgenden

$$\omega = \beta/2\pi \qquad (\omega_k = \beta_k/2\pi) \quad \ldots \ldots \quad (4.3).$$

Man erkennt die qualitative Übereinstimmung im Verlauf der als Schlieren sichtbar werdenden Charakteristiken mit den Aussagen des § 3. In den letzten Bildern erkennt man auch die Reflexion der Charakteristiken am Boden. Entsprechende Reflexionen finden im weiteren Verlauf an der freien Oberfläche statt usw. Unmittelbar unter der Plattenkante ist als dunkler Kloß ein Wirbelballen sichtbar. Man hat sich das Bild der Platte und der Charakteristiken hin und her oszillierend zu denken. Im Bereich der Abweichungen der Bewegung von einer reibungslosen Bewegung (nächste Plattennähe und Bereich des Wirbels) unterliegen die Schlieren nicht den Gesetzen unserer Theorie.

Für sehr kleine ω verlaufen die Charakteristiken fast waagrecht und sind wegen der Kleinheit der Störung des Dichtegradienten als Schlieren schlecht zu erkennen. Auch wenn sich ω andererseits dem kritischen Wert ω_k des Übergangs vom hyperbolischen zum elliptischen Verhalten nähert und die Charakteristiken fast vertikal verlaufen, werden sie undeutlich. Wenn sie auch noch für höhere Frequenzen zu verfolgen waren, als dies in der Bildfolge 2 wiedergegeben ist, so waren sie aber kurz vor dem parabolischen Grenzfall nur in der Nachbarschaft des Körpers erkennbar. Wir geben in § 5 eine Erklärung dafür. Auf Grund dieses Verhaltens ist es zweckmäßig, ω_k mit größerer Genauigkeit extrapolatorisch zu ermitteln. Zur Auswertung der Beobachtungen wurden die Schlieren in Schattenaufnahmen, wie sie in Bild 2 wiedergegeben sind, für jede Schichtung und jede Frequenz photographiert.

Bild 3 (s. Bildtafel) gibt als Beispiel die Auswertung zweier Versuchsreihen (Versuchsreihe Nr. 2 und Nr. 3 in der Übersicht von Zahlentafel 1) zur Nachprüfung des Gesetzes (I). Durch das Feld der jeweiligen Versuchspunkte wurde eine mittlere Gerade aus dem Ursprung heraus gezogen, welche in ihrer Verlängerung bis $\sin\varphi = 1$ den experimentellen Wert der kritischen Frequenz ω_k extrapolatorisch ergibt.

[6]) Die Durchführung der Versuche hat Herr W. Müller übernommen.

Zahlentafel 1. Versuchsdaten. In allen Versuchen war $\varrho_1 = 1{,}00\, g\, \text{cm}^{-3}$

Versuchsreihe Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
H cm	70,0	37,5	50,5	70,0	37,5	70,0	64,0	70,0
$\varrho_2\, g\, \text{cm}^{-3}$	1,19	1,19	1,19	1,095	1,095	1,13	1,19	1,19

In dieser Weise wurden mit der oszillierenden Platte als Störkörper insgesamt 7 lineare Schichtungen durchgemessen (Versuchsreihen Nr. 1 bis Nr. 7 in Zahlentafel 1). In einer achten Versuchsreihe wurde als Störkörper ein waagrecht liegender, bis zur Hälfte eingetauchter Kreiszylinder vom Durchmesser 2 cm benutzt, der senkrecht zu seiner Achse in horizontaler Richtung oszillierte. Die Ergebnisse sämtlicher acht Versuchsreihen sind in Bild 4 (s. Bildtafel) in der Auftragung $\sin\varphi$ über ω/ω_k (ω_k aus den Experimenten, wie oben beschrieben, ermittelt) wiedergegeben. Sie bestätigen innerhalb der Versuchsgenauigkeit gut das behauptete Gesetz (I).

Die aus diesen Versuchsreihen ermittelten Werte der kritischen Frequenz ω_k der untersuchten Schichtungen sind in Bild 5 (s. Bildtafel) aufgetragen. Zum Vergleich ist der theoretische Verlauf von ω_k in Abhängigkeit vom Schichtungsparameter h als Kurve eingezeichnet. Auch das Gesetz (II) wird somit befriedigend bestätigt.

Wir haben uns überzeugt, daß diese Ergebnisse unbeeinflußt bleiben, wenn der Störkörper nicht waagrecht sondern in einer beliebigen anderen Richtung parallel zu den Seitenwänden des Gefäßes oszilliert. Auch die Schwingungsamplitude des oszillierenden Körpers kann in weiten Grenzen geändert werden, ohne die obigen Resultate zu beeinflussen. Für eine Amplitude von 0,03 bis 0,6 cm — soweit ließ sich bei der benutzten Antriebsvorrichtung die Amplitude vergrößern — haben wir dies für die Schichtung des Versuchs Nr. 1 bestätigt.

Zum Schluß sei noch folgende Beobachtung kurz mitgeteilt, obgleich sie nicht unmittelbar in den Rahmen unserer Betrachtungen gehört. In Bild 6 (s. Bildtafel) sieht man neben den von der — hier tiefer eingetauchten — oszillierenden Platte ausgehenden und am Boden sowie an der freien Oberfläche reflektierten Charakteristiken eine Folge von stark ausgeprägten horizontalen Schlieren in Höhe des an der Plattenkante haftenden Wirbelballens. Während die Charakteristiken sofort mit dem Einsetzen der Oszillationen als Schlieren sichtbar werden, (aber natürlich erst nach einer gewissen Einschwingungszeit den von der Theorie geforderten Verlauf zeigen), bildet sich diese Erscheinung erst ganz allmählich vom Wirbel ausgehend nach links und rechts symmetrisch aus. Bild 6 gibt das Stadium der vollen Ausbildung wieder. Es handelt sich hierbei offenbar um eine Zähigkeitswirkung, und zwar um einen durch den hin- und herschlenkernden Wirbel verursachten Austausch der vertikalen Schichtung in der Höhenerstreckung dieses Wirbels. Darauf deutet die Folge der Streifen von oben nach unten: dunkel, hell, dunkel, hell, in der Schattenaufnahme Bild 6 hin, also: Zunahme des Dichtegradienten, dann Abnahme, dann wieder Zunahme und Abnahme.

§ 5. Verallgemeinerung der Ausführungen des § 3 für beliebige stabile Schichtungen.

Es ist bereits bemerkt worden (s. § 3), dass die Theorie des § 3 ganz entsprechend für ein isotherm geschichtetes, adiabatisch kompressibles Gas entwickelt werden kann. Qualitativ bleibt alles unverändert. Wir wollen im folgenden zu qualitativ neuen Ergebnissen fortschreiten, indem wir nunmehr eine beliebige stabile Schichtung $\varrho_0(z)$ zugrundelegen. Das Medium sei wieder eine inkompressible Flüssigkeit.

Gegenüber den Ausführungen des § 3 ergeben sich folgende Änderungen. An Stelle der zweiten Gleichung von (3.2) tritt

$$\{\beta^2 + g\,\varrho_0'/\varrho_0\}\,Z - P_z - (\varrho_0'/\varrho_0)\,P = 0 \quad \text{(3.2a)}.$$

Die Koeffizienten des Systems (3.2) mit (3.2a) sind also im allgemeinen Fall nicht mehr durchweg konstant, sondern hängen zum Teil von z ab. Als Folge ergibt sich, daß die Grundgrößen X, Z und P nicht mehr alle der gleichen Differentialgleichung genügen. Es bezeichne D den Differentialoperator

$$D \equiv \{\beta^2 + g\,\varrho_0'/\varrho_0\}\,\partial^2/\partial x^2 + \beta^2\,\partial^2/\partial z^2 \quad \text{(5.1)}.$$

Dann ergibt die Elimination von X und P für Z die Differentialgleichung

$$D[Z] + \beta^2\,(\varrho_0'/\varrho_0)\,\partial Z/\partial z = 0 \quad \text{(3.4a)}.$$

Entsprechend genügen X und P je einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung, bei der die Glieder der höchsten Ordnung durch $D[X]$ bzw. $D[P]$ gegeben sind, und zwar genügen X und P unter sich derselben Differentialgleichung, wie aus der ersten Gl. (3.2) unmittelbar folgt. Für unsere Betrachtungen ist allein die Gestalt des Operators D wesentlich.

Bildtafel 1 zu:

Görtler, Über eine Schwingungserscheinung in Flüssigkeiten mit stabiler Dichteschichtung.

Bild 1. Versuchsanordnung.

Bild 3. Ergebnisse zweier Versuchsreihen als Beispiele für die Ermittlung von ω_k.

Bild 4. Ergebnisse von 8 Versuchsreihen (Versuchsdaten siehe Zahlentafel 1) zur Bestätigung des Gesetzes (I) (ausgezogene Gerade).

Bild 2. Charakteristiken, sichtbar gemacht als Schlieren, welche von einer leicht eingetauchten oszillierenden Platte ausgehen, bei verschiedenen Frequenzen: von oben nach unten $\omega = 0{,}435$; $0{,}538$; $0{,}625$; $0{,}714$; $0{,}769$; $0{,}848\ \mathrm{sec}^{-1}$. Flüssigkeit: Kochsalzlösung mit in der Ruhelage linearer Dichteschichtung.
($H = 3{,}75$ cm, $\varrho_1 = 1{,}00$ und $\varrho_2 = 1{,}19\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$, daher $h = 19{,}7$ cm.)

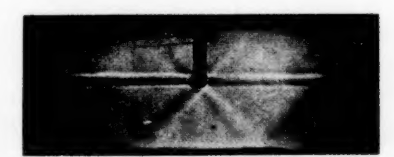


Bild 6. Neben den Charakteristiken, welche sowohl am Boden als an der freien Oberfläche reflektiert werden, sieht man hier einen waagrechten Schlierenstreifen, der sich von dem an der Plattenkante haftenden Wirbel aus allmählich ausgebildet hat.

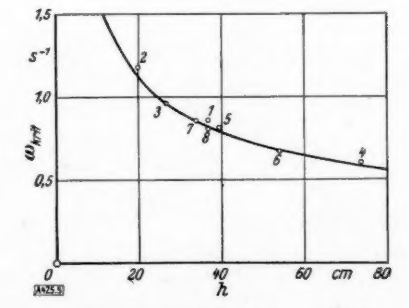


Bild 5. Die experimentell ermittelten kritischen Frequenzen in Abhängigkeit vom Schichtungsparameter h. Die ausgezogene Kurve stellt das theoretische Gesetz (II) dar.

Es ist $\varrho_0'/\varrho_0 \leqq 0$ nach (2.2). Der Operator D ist nun für

$$\beta^2 \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} - g\, \varrho_0'/\varrho_0 \left\{ \begin{matrix} \text{elliptisch} \\ \text{parabolisch} \\ \text{hyperbolisch} \end{matrix} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3.5\text{a}).$$

Es kann also nunmehr die grundlegende Differentialgleichung in dem flüssigkeitserfüllten Raum bei einer festen Frequenz β ganz oder auch in einzelnen horizontalen Streifen, je nach der Schichtung, zu einem der drei Typen gehören.

Die Charakteristiken bestehen aus den beiden Kurvenscharen

$$\beta x \pm \int_{z_0}^{z} \sqrt{g\,|\varrho_0'/\varrho_0| - \beta^2}\, \mathrm{d}z = \text{const.} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3.6\text{a}).$$

Sie sind in „hyperbolischen Streifen" ($\beta^2 < g\,|\varrho_0'/\varrho_0|$) reell und verschieden. Die Tangenten der einzelnen Kurven bilden mit der positiven x-Achse einen Winkel φ, für den

$$\sin \varphi(z) = \beta/\beta_k(z) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\text{I a})$$

gilt. Hierin ist β_k die im allgemeinen von z abhängige „kritische Kreisfrequenz":

$$\beta_k(z) = \sqrt{g\,|\varrho_0'/\varrho_0|} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\text{II a}).$$

Da der Charakteristikenverlauf bei jeweils festen β nur von dem relativen Dichtegradienten ϱ_0'/ϱ_0 abhängt, liefern zwei Dichteverteilungen dann (und nur dann) dasselbe Charakteristikenfeld, wenn sie sich nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Wenn in einem ganzen endlichen Streifen $z_1 \leqq z \leqq z_2$ der parabolische Fall bei einer gewissen festen Frequenz β vorliegt, so muß in diesem Streifen $\varrho_0'/\varrho_0 =$ const. sein, d. h. ϱ_0 muß dort notwendig dem speziellen Verteilungsgesetz (3.1) genügen. Im allgemeinen wird der parabolische Fall nur als Uebergangsfall auf horizontalen Grenzlinien zwischen hyperbolischen und elliptischen Gebieten auftreten. An parabolischen Grenzen hyperbolischer Streifen — immer bezüglich einer bestimmten festen Frequenz β — münden die Charakteristiken senkrecht auf diesen Grenzen ein.

Die Krümmung der Charakteristiken $x = x(z)$ ist durch

$$k = \pm\, \beta^2 (\varrho_0 \varrho_0'' - \varrho_0'^2) / 2 \{g\, \varrho_0'^3 (g\, \varrho_0' + \beta^2 \varrho_0)\}^{1/2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5.2)$$

gegeben. Die Charakteristiken haben also in eventuell vorhandenen parabolischen Grenzlinien hyperbolischer Streifen verschwindenden Krümmungsradius.

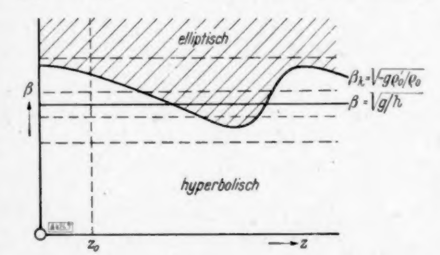


Bild 7. Die spezielle Verteilung (3.1) besitzt die konstante kritische Frequenz $\sqrt{g/h}$. Die experimentelle Aproximation dieser Verteilung zeigt leichte Abweichungen. Demzufolge schwankt auch ihre kritische Frequenz $\beta_k(z) = \sqrt{-g\varrho_0'/\varrho_0}$ (ausgezogene Kurve, stark überhöht) leicht um den konstanten Wert $\sqrt{g/h}$. Daher sind die von einer Stelle in Höhe $z = z_0$ ausgehenden Schlieren für Frequenzen β nahe an $\sqrt{g/h}$ nur für solche z sichtbar, für welche die Gerade $\beta =$ const. in diesem Bilde noch nicht das schraffierte Gebiet betreten hat. (Siehe jedoch hierzu die Bemerkung im unten folgenden Text.)

Ich habe bereits in § 4 erwähnt, daß in unseren Versuchen die Schlieren für β-Werte nahe unter $\sqrt{g/h}$ nicht gut zu beobachten waren. Das überrascht nun nicht mehr. Denn wir hätten in unseren Versuchen die Verteilung (3.1) sehr sorgfältig approximieren müssen, um für Frequenzen β, die sehr nahe unter $\sqrt{g/h}$ liegen, nicht schon durch irgendwelche kleine Schwankungen von ϱ_0 um die approximierte Verteilung (3.1) schmale elliptische Streifen verursacht zu haben. Nach unserer Theorie, welche die Schlieren durch mathematische Unstetigkeitslinien wiedergibt, sind solche elliptische Gebiete absolute Sperren für diese Linien. In der wirklichen Flüssigkeit, in der die Schlieren örtlich starke Änderungen des Dichtegradienten angeben, trifft dies zwar nicht genau zu, aber die Schlieren werden beim Eindringen in ein elliptisches Gebiet sehr rasch diffus (breiter und schwächer). (Es ist jedoch möglich, daß sie sich durch sehr schmale elliptische Streifen hindurch, aber nur entsprechend geschwächt, fortsetzen.)

Der Vollständigkeit halber sei zum Schluß ergänzend bemerkt, daß im allgemeinen Fall dreidimensionaler Schwingungen natürlich ganz entsprechende Verhältnisse vorliegen. Da die x- und y- Koordinaten gleichberechtigt auftreten, erscheint an Stelle des Operators D lediglich

$$D' \equiv \{\beta^2 + g\, \varrho_0'/\varrho_0\} \{\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2\} + \beta^2\, \partial^2/\partial z^2,$$

und an Stelle der Charakteristikenlinien (zylindrischen Charakteristikenflächen) treten entsprechend allgemeinere Charakteristikenflächen.

Z. angew. Math. Mech. Bd. 23 Nr. 2 April 1943

Strömungen über Bodenerhebungen auf der rotierenden Erde.

Von *W. Rothstein* in Göttingen, z. Zt. im Felde[1]).

(Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Die von H. Görtler aufgestellten Gleichungen für die Strömung einer volumbeständigen Flüssigkeitsschicht konstanter Dichte über Bodenerhebungen auf der rotierenden Erde[2]) werden für den Fall endlich ausgedehnter Bodenerhebungen behandelt. Dabei wird jedoch zunächst der in jenen Gleichungen erfaßte Reibungseinfluß vernachlässigt. Als Beispiele werden durchgerechnet ein Berg mit kreisförmigen und ein Berg mit elliptischen Höhenlinien.

§ 1. Einleitung.

H. Görtler hat in einer kürzlich erschienenen Arbeit[2]) den gemeinsamen Einfluß von Erddrehung und Bodentopographie auf den Verlauf einer stationären atmosphärischen oder ozeanischen Strömung unter Berücksichtigung der Reibung in Bodennähe untersucht. Das Medium wurde der Einfachheit zuliebe als volumbeständig und seine Dichte konstant angenommen. Nach oben soll es durch eine freie Oberfläche begrenzt sein. Von weiteren für das Zustandekommen solcher Strömungen in der Natur wesentlichen Einflüssen wurde bewußt abgesehen, um die mathematischen Schwierigkeiten in erträglichen Grenzen zu halten.

Wir wollen zunächst die Voraussetzungen und die mathematische Formulierung des Problems skizzieren, auf Grund derer Görtler zu jenen Grundgleichungen gelangte, von denen wir auszugehen haben. Der Rechnung wurde ein erdfestes kartesisches Koordinatensystem x^*, y^*, z^* zugrunde gelegt, dessen Ursprung o mit einem Punkt der Erdoberfläche zusammenfällt, während die z^*-Achse radial nach außen weist. Es seien

$\vec{\omega} = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$ die Drehgeschwindigkeit der Erde,

$\mathfrak{v}^* = \{u^*, v^*, w^*\}$ die Geschwindigkeit eines Massenteilchens

bezüglich der Erde, p^* der Druck, ϱ die als konstant angenommene Dichte, $H^*(x^*, y^*)$ die Höhe der Flüssigkeitsschicht und B ein Maß für die horizontale Ausdehnung der Bodenunebenheit.

Der Einfluß der Reibung in der bodennahen Grenzschicht wurde in erster Näherung folgendermaßen erfaßt. Außerhalb der Grenzschicht, deren Rand durch $z^* = \zeta^*(x^*, y^*)$ gegeben sei, fließt die Hauptströmung reibungslos. In der Grenzschicht entsteht infolge der Schwächung der Corioliskräfte eine horizontale Sekundärströmung. Da diese im allgemeinen nicht quellenfrei ist, erfolgt aus Kontinuitätsgründen ein vertikaler Massenstrom zwischen Hauptströmung und Grenzschichtströmung. Man kann für den horizontalen Massenstrom $\mathfrak{M}$ der Sekundärströmung setzen: $\mathfrak{M} = \varrho\, h\, \mathfrak{V}^*$. Dabei ist die „gedrehte Geschwindigkeit" $\mathfrak{V}^* = \{-v^*, u^*, 0\}$ und h ein Proportionalitätsfaktor von der Dimension einer Länge, der auf der nördlichen Halbkugel positiv, auf der südlichen negativ ist. Für eine grob-abschätzende erste Näherung kann h als konstant angesetzt werden.

Setzt man nun $|\operatorname{Grad} \zeta^*| \ll 1$ voraus[3]), so wird $|w^*| \ll \{u^{*2} + v^{*2}\}^{1/2}$ sein. Vernachlässigt man daher die mit w^* behafteten Glieder in den Eulerschen Gleichungen und außerdem wie üblich die vertikalen Beschleunigungen gegen die horizontalen, ersetzt man ferner die geographische Breite φ durch $\varphi(o)$ und die Erdbeschleunigung $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{g}(o) = \{0, 0, g\}$, so erhält man die Bewegungsgleichungen

---

[1]) Wegen seiner Einberufung zur Wehrmacht ist es dem Verfasser auf unbestimmte Zeit unmöglich geworden, gewisse geplante Ergänzungen zu den im vorliegenden Bericht wiedergegebenen Untersuchungen zu vollenden. Diese Ergänzungen beziehen sich auf eine Milderung der Voraussetzung bezüglich ζ in dem Konvergenzbeweis des § 4, auf eine Verschärfung der Abschätzung in § 6 und ihre Verallgemeinerung auf beliebige Bergformen, sowie schließlich und vor allem auf eine nachträgliche Abschätzung des Reibungseinflusses, der auf Grund der Ergebnisse von H. Görtler (a. a. O.) zunächst einmal vernachlässigt worden ist.

[2]) H. Görtler: Einfluß der Bodentopographie auf Strömungen über der rotierenden Erde. Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941), S. 279 bis 303. Siehe auch den zusammenfassenden Bericht von H. Görtler: Neuere Beiträge zur Dynamik atmosphärischer und ozeanischer Strömungen. Naturwiss. Bd. 29 (1941), S. 473 bis 479, ferner vom selben Verfasser: Strömungen über Bodenerhebungen auf der rotierenden Erde. Meteor. Z. Bd. 59 (1942), S. 405 bis 410.

[3]) Wir benutzen mit Görtler die zweidimensionalen Differentialoperatoren $\operatorname{Grad} f = \{f_x, f_y\}$. $\operatorname{Div}\{a, b\} = a_x + b_y$. $\operatorname{Rot}\{a, b\} = b_x - a_y$ (skalar!).

$$\left.\begin{aligned} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} &= -\frac{1}{\varrho^*}\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + 2\,\omega' v^*, \\ u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= -\frac{1}{\varrho^*}\frac{\partial p^*}{\partial y^*} - 2\,\omega' u^*, \\ 0 &= -g - \frac{1}{\varrho^*}\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.1)$$

mit $\omega' = |\vec{\omega}| \sin\varphi(o)$. Hinzu tritt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.2).$$

Hat die Hauptströmung beim Eintritt in den betrachteten Bereich eine von z^* unabhängige Horizontalgeschwindigkeit u^*, v^* — und dies soll fernerhin stets angenommen werden —, so behält sie diesen Charakter. Denn die Gln. (1.1) und (1.2) haben Lösungen der Form $u^* = u^*(x^*, y^*)$; $v^* = v^*(x^*, y^*)$; $w^* = a(x^*, y^*) \cdot z^* + b(x^*, y)$. Man setzt daher für die gesuchte Geschwindigkeitsverteilung der Hauptströmung:

$$\mathfrak{v}^* = \mathfrak{V}^*(x^*, y^*) + \mathfrak{w}^*(x^*, y^*, z^*)$$

mit

$$\mathfrak{V}^* = \{u^*, v^*, 0\}, \quad \mathfrak{w}^* = \{0, 0, w^*\},$$

und berechnet $\mathfrak{V}^*$ und $\mathfrak{w}^*$ gesondert.

Es wird durch die Rechnung bestätigt, das H^* bei genügend flachen Erhebungen ζ^* im ganzen Strömungsbereich mit genügender Genauigkeit durch einen Mittelwert $\overline{H}$ ersetzt werden kann. Führt man dimensionslose Größen ein: $x = x^*/B$, $y = y^*/B$, $z = z^*/\overline{H}$, $\zeta = \zeta^*/\overline{H}$, $H = H^*/\overline{H}$, $u = u^*/|\mathfrak{V}_0^*|$, $v = v^*/|\mathfrak{V}_0^*|$, wo B eine konstante waagerechte Länge, H eine senkrechte Länge (ungestörte Dicke der strömenden Schicht) und $\mathfrak{V}_0^* = \{u_0^*, v_0^*, 0\}$ eine örtlich und zeitlich konstante Bezugsgeschwindigkeit — im weiteren die ungestörte Anströmgeschwindigkeit in der Hauptströmung weit vor der Bodenerhebung — bedeutet, und setzt man ferner $R = |\mathfrak{V}_0^*|/2\,\omega'$ (der zu $\mathfrak{V}_0^*$ gehörige „Trägheitskreisradius"), so lassen sich die ersten beiden Gln. (1.1) nach Elimination des Druckes zusammenfassen zu[4]):

$$\operatorname{Div}\left[\mathfrak{V} \operatorname{Rot} \mathfrak{V} + \frac{B}{R}\mathfrak{V}\right] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.3).$$

Die Kontinuitätsgleichung (1.2) liefert bei präziser Durchführung des skizzierten Gedankens zur Erfassung des Reibungseinflusses in der Bodenschicht für die Hauptströmung die weitere Gleichung[5]):

$$\operatorname{Div}\left[(1-\zeta)\,\mathfrak{V} + \frac{h}{\overline{H}}\overline{\mathfrak{V}}\right] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.4),$$

wobei $\overline{\mathfrak{V}}$ die gedrehte Geschwindigkeit bedeutet (vgl. S. 72).

Aus (1.3) und (1.4) läßt sich in Verallgemeinerung einer Bemerkung von Görtler[5]), in einfacher Weise nach Integration längs Stromlinien die Gleichung

$$\operatorname{Rot} \mathfrak{V} + \frac{B}{R} = C(1-\zeta) - (1-\zeta)\int_{s_0}^{s} \frac{h}{\overline{H}} \operatorname{Rot} \mathfrak{V}\left(\operatorname{Rot} \mathfrak{V} + \frac{B}{R}\right)\frac{d\,s}{|\mathfrak{V}|} \quad \ldots\ldots \quad (1.5)$$

gewinnen. Das Integral ist über Stromlinien der $\mathfrak{V}$-Strömung zu erstrecken, s ist die Bogenlänge dieser Stromlinien, C und s_0 sind längs Stromlinien konstant.

Görtler hat der mathematischen Einfachheit halber zunächst den Fall vollständig behandelt, daß ζ nur von einer kartesischen Koordinate abhängt (langgestreckte Gebirgskämme). Sein wichtigstes Ergebnis war, daß die Reibung in der Bodenschicht bei den praktisch interessierenden atmosphärischen und ozeanischen Strömungen im allgemeinen nur einen völlig untergeordneten Einfluß ausübt. Es ist nun von Interesse, wenigstens an einigen Beispielen das Verhalten der Strömung über Erhebungen $z = \zeta$ von endlicher Erstreckung quer zur Anströmungsrichtung zu untersuchen. Mathematisch liegt es nahe, etwa solche Erhebungen zu wählen, deren Höhenlinien einfache geschlossene Kurven, z. B. Ellipsen sind. Görtlers Aussage über den Reibungseinfluß läßt demgegenüber die Vereinfachung angebracht erscheinen, daß man **zunächst den Reibungseinfluß vernachlässigt**.

---

[4]) H. Görtler: a. a. O. S. 302.
[5]) H. Görtler: a. a. O., S. 302.

§ 2. Mathematische Formulierung des Problems.

Es soll also in (1.4) und (1.5) $h = 0$ gesetzt werden. Wir haben es dann mit dem System

$$\operatorname{Rot} \mathfrak{V} = -\frac{B}{R} + C(1-\zeta) \quad \text{(2.1)},$$

$$\operatorname{Div}[(1-\zeta)\mathfrak{V}] = 0 \quad \text{(2.2)}$$

zu tun. Zur Festlegung der Grenzbedingungen beachten wir, daß unsere Gleichungen auch die Strömung über eine sich mit der festen Winkelgeschwindigkeit ω' drehende unendlich ausgedehnte ebene Scheibe darstellen (vgl. Görtler a. a. O. S. 282). Haben wir es, wie wir annehmen, mit einer endlich ausgedehnten Bodenunebenheit zu tun, so ist es eine in gleicher Weise für unsere Strömung wie für die Modellströmung natürliche Forderung, wenn wir verlangen: $\lim\limits_{x^2+y^2 \to \infty} \mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0$ und $\lim\limits_{x^2+y^2 \to \infty} \operatorname{Rot} \mathfrak{V} = 0$.

Dann folgt $C = B/R$ und wir erhalten

$$\operatorname{Rot} \mathfrak{V} = -\frac{B}{R}\zeta \quad \text{(2.3)}.$$

Auf Grund von (2.2) existiert eine in der ganzen x, y-Ebene eindeutige Funktion $A(x, y)$, so daß

$$(1-\zeta)\mathfrak{V} = \{A_y, -A_x\}.$$

(2.3) geht dann über in

$$\operatorname{Div} \frac{1}{1-\zeta} \operatorname{Grad} A = \frac{B}{R}\zeta \quad \text{(2.4)}.$$

Unsere Aufgabenstellung ist nun zurückgeführt auf die Bestimmung einer in der ganzen Ebene zweimal stetig differenzierbaren Lösung A der Gl. (2.4), von der lediglich noch verlangt wird:

$$\text{Grenzbedingung:} \lim_{x^2+y^2 \to \infty} \operatorname{Grad} A = \mathfrak{V}_0 = \{-v_0, u_0\} \quad \text{(2.5)}.$$

§ 3. Einzigkeit der Lösung.

Gäbe es zwei Lösungen $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$ der Gl. (2.4), die der Grenzbedingung (2.5) genügen, so würde für die Differenz $A^{(0)} = A^{(1)} - A^{(2)}$ gelten:

$$\operatorname{Div} \frac{1}{1-\zeta} \operatorname{Grad} A^{(0)} = 0 \text{ und } \lim_{x^2+y^2 \to \infty} \operatorname{Grad} A^{(0)} = 0 \quad \text{(3.1)}.$$

Die Kreisfläche $\mathfrak{K} \equiv \{x^2 + y^2 < R_0^2\}$ mit der Peripherie $\mathfrak{R}$ möge die Bodenunebenheit ganz im Innern enthalten. Dann ist nach dem Gaußschen Satz:

$$0 = \iint_{\mathfrak{K}} \operatorname{Div} \frac{1}{1-\zeta} \operatorname{Grad} A^{(0)}\, \mathrm{d}f = \oint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial A^{(0)}}{\partial n}\, \mathrm{d}s \quad \text{(3.2)}.$$

Im Gebiet $\bar{\mathfrak{K}} \equiv \{x^2 + y^2 > R_0^2\}$ gilt: $\Delta A^{(0)} = 0$. Wegen (3.2) ist in $\bar{\mathfrak{K}}$ die zu $A^{(0)}$ konjugierte Potentialfunktion $B^{(0)}$ eindeutig. Die Funktion $F = A^{(0)} + i B^{(0)}$ ist daher außerhalb $\mathfrak{K}$ eindeutig und analytisch und insbesondere im Unendlichen infolge der Grenzbedingung $\lim\limits_{x^2+y^2 \to \infty} \operatorname{Grad} A^{(0)} = 0$ regulär. Daraus folgt:

$$\lim_{x^2+y^2 \to \infty} A^{(0)} \text{ existiert und } \lim_{x^2+y^2 \to \infty} \sqrt{x^2+y^2}\, \frac{\partial A^{(0)}}{\partial n} = 0 \quad \text{(3.3)}.$$

Nun ist wegen (3.1):

$$0 = A^{(0)} \operatorname{Div} \frac{1}{1-\zeta} \operatorname{Grad} A^{(0)} = \operatorname{Div} A^{(0)} \frac{1}{1-\zeta} \operatorname{Grad} A^{(0)} - \frac{1}{1-\zeta} (\operatorname{Grad} A^{(0)})^2.$$

Also:

$$\iint_{\mathfrak{K}} \operatorname{Div}\left(\frac{A^{(0)}}{1-\zeta} \operatorname{Grad} A^{(0)}\right) \mathrm{d}f = \oint_{\mathfrak{R}} \frac{A^{(0)}}{1-\zeta} \frac{\partial A^{(0)}}{\partial R_0}\, \mathrm{d}s = \iint_{\mathfrak{K}} \frac{1}{1-\zeta} (\operatorname{Grad} A^{(0)})^2\, \mathrm{d}f \quad \text{(3.4)}.$$

Zufolge (3.3) muß $\lim\limits_{R_0 \to \infty} \oint \frac{A^{(0)}}{1-\zeta} \frac{\partial A^{(0)}}{\partial R_0}\, \mathrm{d}s = 0$ sein, also nach (3.4):

$$\operatorname{Grad} A^{(0)} \equiv 0 \qquad (1-\zeta > 0).$$

§ 4. Lösung der Gleichung (2.4).

Gl. (2.4) lautet ausgeschrieben:

$$\Delta A + \frac{1}{1-\zeta}\zeta_x A_x + \frac{1}{1-\zeta}\zeta_y A_y = \frac{B}{R}\zeta(1-\zeta) \quad \quad (4.1).$$

Wir schreiben:

$$A = u_0 y - v_0 x + A' \quad \quad (4.2)$$

und machen für den Störungsanteil A' nun den Ansatz

$$A' = -\iint_{\text{Berg}} \log r^* \cdot \psi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \quad \text{mit} \quad r^{*2} = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \quad \quad (4.3).$$

Dann ergibt (4.1) eine Integralgleichung für ψ (vgl. hierzu Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik II, S. 279ff.):

$$\psi(x,y) = \iint_{\text{Berg}} K(x,y;\xi,\eta)\cdot\psi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta - \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{B}{R}\zeta(1-\zeta) - \frac{\mathfrak{V}_0 \cdot \operatorname{Grad}\zeta}{1-\zeta}\right\} \quad \quad (4.4)$$

mit

$$K(x,y;\xi,\eta) = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-\zeta}\left\{\zeta_x \frac{x-\xi}{r^{*2}} + \zeta_y \frac{y-\eta}{r^{*2}}\right\}.$$

Außerhalb des Berges — dort ist $\zeta \equiv 0$ — verschwindet ψ. Daher ist jedenfalls nach bekannten Sätzen über das logarithmische Flächenpotential unsere Grenzbedingung erfüllt, falls eine überall zweimal stetig differenzierbare Lösung ψ von (4.4) existiert. Es liegt nahe, für ψ die Neumannsche Reihe anzusetzen:

$$\left.\begin{aligned}
\psi &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu; \\
\psi_0 &= -\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{B}{R}\zeta(1-\zeta) - \mathfrak{V}_0 \cdot \frac{\operatorname{Grad}\zeta}{1-\zeta}\right\} \\
&\approx -\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{B}{R}\zeta - \mathfrak{V}_0 \cdot \operatorname{Grad}\zeta\right\} \text{ (im Rahmen unserer Theorie der 1. Ordnung)} \\
\psi_{\nu+1} &= \iint_{\text{Berg}} K(x,y;\xi,\eta)\cdot\psi_\nu(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta
\end{aligned}\right\} \quad \quad (4.5).$$

Gehen wir mit diesem Ansatz in (4.3) ein, so erhalten wir:

$$A' = \sum_{\nu=0}^{\infty} A'_\nu \quad \text{mit:} \quad A'_\nu = -\iint_{\text{Berg}} \log r^* \cdot \psi_\nu(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \quad \quad (4.6).$$

Bezeichnen wir den Aufpunkt mit $P(x,y)$, so ergibt sich zunächst formal für den uns allein interessierenden $\operatorname{Grad}_P A'$ die Entwicklung:

$$\operatorname{Grad}_P A' = \sum_{\nu=0}^{\infty} \operatorname{Grad}_P A'_\nu \quad \quad (4.7)$$

mit:

$$\operatorname{Grad}_P A'_\nu = -\iint_{\text{Berg}} \operatorname{Grad}_P \log r^* \cdot \psi_\nu(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Konvergiert diese Entwicklung gleichmäßig, so liefert sie die Lösung unseres Problems. Die Neumannsche Reihe für ψ (und dann auch die Reihe (4.7)) konvergiert sicher gleichmäßig, wenn $|\operatorname{Grad}\zeta|$ hinreichend klein ist. Man hat ja:

$$|\psi_{\nu+1}| \leqq \max|\psi_\nu| \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-\zeta}\iint_{\text{Berg}}\left\{|\zeta_x|\frac{|x-\xi|}{r^{*2}} + |\zeta_y|\frac{|y-\eta|}{r^{*2}}\right\} d\xi\,d\eta$$

$$\leqq \max|\psi_\nu| \cdot M \cdot \max|\operatorname{Grad}\zeta|;$$

$$\left[M = \max \iint \frac{|x-\xi| + |y-\eta|}{r^{*2}}\,d\xi\,d\eta\right].$$

Diese sehr rohe Abschätzung könnte ohne grundsätzliche Schwierigkeiten wesentlich verbessert werden[6]). Vermutlich wird die Konvergenz der Entwicklung auch dann gewährleistet sein, wenn wesentlich schwächere Forderungen an $|\mathrm{Grad}\,\zeta|$ gestellt werden.

§ 5. Beispiel: Ein Berg mit elliptischen Höhenlinien.

Wir führen elliptische Koordinaten ein:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\vartheta, \quad y = \sqrt{r^2 - e^2}\sin\vartheta; \\ \text{Flächenelement } \mathrm{d}\omega = \dfrac{r^2 - e^2\cos^2\vartheta}{\sqrt{r^2 - e^2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (5.1).$$

Die Kurvenschar $r = \mathrm{const.}$ besteht aus den konfokalen Ellipsen

$$E(r):\quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2 - e^2} = 1.$$

Wir setzen nun voraus, die Bodenerhebung ζ sei eine reine Funktion von r:

$$\zeta = \zeta(r) \quad \text{für} \quad 0 \leqq r \leqq R_0; \qquad \zeta \equiv 0 \quad \text{für} \quad r \geqq R_0.$$

Benutzen wir zur Abkürzung:

$$k(r) = \frac{B}{R}\,\zeta(r) - \mathfrak{B}_0 \cdot \mathrm{Grad}\,\zeta,$$

so haben wir, wenn wir uns zunächst auf Grad A_0' als 1. Näherung für Grad A' beschränken, zu berechnen:

$$\frac{\partial A_0'}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_e^{R_0}\int\limits_0^{2\pi} k(r)\,\frac{\partial \log r^*}{\partial x}\,\frac{r^2 - e^2\cos^2\vartheta}{\sqrt{r^2 - e^2}}\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r.$$

Partielle Integration nach r ergibt bei Beachtung von $k(R_0) = 0$:

$$2\pi\,\frac{\partial A_0'}{\partial x} = -\int\limits_e^{R_0}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r}\left\{\int\limits_e^{r}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial \log r^*}{\partial x}\cdot\frac{r'^2 - e^2\cos^2\vartheta}{\sqrt{r'^2 - e^2}}\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r'\right\}\mathrm{d}r \quad \ldots \quad (5.2).$$

Hier müssen wir eine Bemerkung über die Anziehung homogen mit Masse belegter Ellipsen einschalten. Liegt der Aufpunkt (x, y) innerhalb der Ellipse $E(r_1)$ und setzen wir:

$$L = \iint\limits_{E(r_1)} \log r^*\,\mathrm{d}\omega,$$

so gilt:

$$L_x = 2\pi\,\frac{\sqrt{r_1^2 - e^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 - e^2}}\cdot x, \qquad L_y = 2\pi\,\frac{r_1}{r_1 + \sqrt{r_1^2 - e^2}}\cdot y \quad \ldots \quad (+).$$

Liegt dagegen der Aufpunkt (x, y), dessen „Radius" r sei, außerhalb $E(r_1)$, gilt also $E(r_1) \ll E(r)$, so folgt aus (+) in Verbindung mit dem Satz von Ivory:

$$L_x = 2\pi\,\frac{r_1\sqrt{r_1^2 - e^2}}{r(r + \sqrt{r^2 - e^2})}\cdot x, \qquad L_y = 2\pi\,\frac{r_1\sqrt{r_1^2 - e^2}}{\sqrt{r^2 - e^2}\,(r + \sqrt{r^2 - e^2})}\cdot y \quad \ldots \quad (++).$$

Aus (++) liest man den Satz von Mac Laurin ab: Die Anziehungskräfte zweier homogen mit Masse belegter konfokaler Ellipsen auf einen äußeren Punkt sind gleichgerichtet und proportional der Gesamtmasse. (Zum Vorstehenden vgl. A. Wangerin, Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen I, S. 195, 218.)

Wir kehren zur Gl. (5.2) zurück. Den Aufpunkt bezeichnen wir jetzt mit $P_0(x_0, y_0)$ und es möge sein: $x_0 = r_0\cos\vartheta_0$, $y_0 = \sqrt{r_0^2 - e^2}\sin\vartheta_0$. P_0 liege in $E(R_0)$. Wir zerlegen:

$$\int\limits_e^{R_0} = \int\limits_e^{r_1} + \int\limits_{r_1}^{r_2} + \int\limits_{r_2}^{R_0} \quad (e < r_1 < r_0 < r_2 < R_0).$$

Ist nun $F(r)$ der Flächeninhalt von $E(r)$, so gilt auf Grund von (++) wegen $r < r_0$:

---

[6]) Man könnte etwa (vgl. Courant-Hilbert a. a. O.) von (4.4) zur iterierten Integralgleichung übergehen, deren Kern $K^{(2)}$ im Gegensatz zu K quadratintegrierbar ist. Für die Glieder der Neumannschen Reihe dieser Gleichung kennt man dann eine Abschätzung (vgl. G. Wiarda: Integralgleichungen. Leipzig und Berlin 1930, S. 85 ff.). Jedoch würde eine solche Abschätzung praktisch recht mühevoll sein.

$$\left.\begin{aligned}
&\int_e^{r_1}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r}\left\{\int_e^r\int_0^{2\pi}\frac{\partial\log r^*}{\partial x}\cdot\frac{r'^2-e^2\cos^2}{\sqrt{r'^2-e^2}}\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r'\right\}\mathrm{d}r\\
&=\left\{\frac{1}{F(r_1)}\int_e^{r_1}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\log r^*}{\partial x}\,\mathrm{d}\omega\right\}\int_e^{r_1}F(r)\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r\\
&=\frac{2\pi x_0}{r_0(r_0+\sqrt{r_0^2-e^2})}\int_e^{r_1}r\sqrt{r^2-e^2}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(5.3).$$

Im Integral $\int_{r_2}^{R_0}$ kann wegen $r > r_0$ nach (+) $\int_e^r\int_0^{2\pi}\frac{\partial\log r^*}{\partial x}\,\mathrm{d}\omega$ durch $\frac{2\pi\sqrt{r^2-e^2}}{r+\sqrt{r^2-e^2}}\cdot x_0$ ersetzt werden, also:

$$\int_{r_2}^{R_0}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r}\left\{\int_e^r\int_0^{2\pi}\frac{\partial\log r^*}{\partial x}\,\mathrm{d}\omega\right\}\mathrm{d}r=2\pi x_0\int_{r_2}^{R_0}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r}\frac{\sqrt{r^2-e^2}}{r+\sqrt{r^2-e^2}}\,\mathrm{d}r\quad\ldots\ldots\quad(5.4).$$

Beachten wir schließlich: $\lim\limits_{\substack{r_1\to r_0\\ r_2\to r_0}}\int_{r_1}^{r_2}=0$, so folgt aus (5.3) und (5.4):

$$\frac{\partial A_0'}{\partial x}=-\frac{x}{r(r+\sqrt{r^2-e^2})}\int_e^r r'\sqrt{r'^2-e^2}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r'}\,\mathrm{d}r'-x\int_r^{R_0}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r'}\frac{\sqrt{r'^2-e^2}}{r'+\sqrt{r'^2-e^2}}\,\mathrm{d}r'\quad\ldots\quad(5.5\text{a})$$

und entsprechend:

$$\frac{\partial A_0'}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{r^2-e^2}(r+\sqrt{r^2-e^2})}\int_e^r r'\sqrt{r'^2-e^2}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r'}\,\mathrm{d}r'-y\int_r^{R_0}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r'}\frac{r'}{r'+\sqrt{r'^2-e^2}}\,\mathrm{d}r'\quad(5.5\text{b}).$$

Wir haben in diesen Ausdrücken den Aufpunkt wieder mit (x, y) bezeichnet.

Im Sonderfall $e=0$ gehen die Ellipsen in Kreise über; r, ϑ sind dann gewöhnliche Polarkoordinaten. Nach kurzer Rechnung ergibt sich für diesen Fall:

$$\frac{\partial A_0'}{\partial x}=\frac{x}{r^2}\int_0^r r'\,k(r')\,\mathrm{d}r';\qquad\frac{\partial A_0'}{\partial y}=\frac{y}{r^2}\int_0^r r'\,k(r')\,\mathrm{d}r'\quad\ldots\ldots\quad(5.6)$$

und hieraus:

$$\frac{\partial A_0'}{\partial r}=\frac{1}{r}\int_0^r r'\,k(r')\,\mathrm{d}r';\qquad\frac{\partial A_0'}{\partial\varphi}\equiv 0\quad\ldots\ldots\quad(5.6\text{a}).$$

Die Stromfunktion für die Störströmung lautet also beim Kreise:

$$A_0'=\int_0^r\frac{1}{r_1}\int_0^{r_1}r_2\,k(r_2)\,\mathrm{d}r_2\,\mathrm{d}r_1\quad\ldots\ldots\quad(5.7).$$

Im allgemeinen Fall $e>0$ erhält man zunächst:

$$\left.\begin{aligned}
-2A_0'=&\frac{r\cos^2\vartheta+\sqrt{r^2-e^2}\sin^2\vartheta}{r+\sqrt{r^2-e^2}}\int_e^r r'\sqrt{r'^2-e^2}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r'}\,\mathrm{d}r'\\
&+\int_e^r\frac{\mathrm{d}r_1}{\sqrt{r_1^2-e^2}}\int_e^{r_1}r_2\sqrt{r_2^2-e^2}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r_2}\,\mathrm{d}r_2\\
&+r^2\cos^2\vartheta\int_r^{R_0}\frac{\sqrt{r_1^2-e^2}}{r_1+\sqrt{r_1^2-e^2}}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r_1}\,\mathrm{d}r_1+(r^2-e^2)\sin^2\vartheta\int_r^{R_0}\frac{r_1}{r_1+\sqrt{r_1^2+e^2}}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r_1}\,\mathrm{d}r_1
\end{aligned}\right\}\quad(5.8).$$

Mit Berücksichtigung der Beziehung $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2-e^2}=1$ und der Gleichung $\int_e^r\frac{\mathrm{d}r_1}{\sqrt{r_1^2-e^2}}=\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{r}{e}$ erhält man aus (5.8):

$$\left.\begin{aligned}
A_0 = &-\frac{1}{2}x^2\left\{\frac{r-\sqrt{r^2-e^2}}{r^2\left(r+\sqrt{r^2-e^2}\right)}\int\limits_e^r r_1\sqrt{r_1^2-e^2}\,\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r_1}\,\mathrm{d}r_1\right.\\
&\left.-k(r)-\left(2-\frac{e^2}{r^2}\right)\int\limits_r^{R_0}\frac{r_1}{r_1+\sqrt{r_1^2-e^2}}\,\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r_1}\,\mathrm{d}r_1\right\}\\
&-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{r^2-e^2}}{r+\sqrt{r^2-e^2}}+\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{r}{e}\right)\int\limits_e^r r_1\sqrt{r_1^2-e^2}\,\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r_1}\,\mathrm{d}r_1\\
&-\frac{1}{2}(r^2-e^2)\int\limits_r^{R_0}\frac{r_1}{r_1+\sqrt{r_1^2-e^2}}\,\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r_1}\,\mathrm{d}r_1+\frac{1}{2}\int\limits_e^r r_1\sqrt{r_1^2-e^2}\,\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r_1}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{r_1}{e}\,\mathrm{d}r_1
\end{aligned}\right\}\quad \ldots \quad (5.9)$$

Ist nun $\mathfrak{V}_\infty = \{0,1\}$, so ergibt sich für die Stromfunktion:

$$A = A_0' - x.$$

Die Stromlinien berechnen sich nach dem Schema der folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&-A = x+\frac{1}{2}G_2(r)\,x^2+\frac{1}{2}G_1(r) = \mathrm{const};\\
\text{mit}\quad &G_1 = F_1 J_1 + (r^2-e^2)\,J_2 - J_3;\\
&G_2 = F_2 J_1 - k(r) + F_3 J_2;\\
&F_1 = \frac{\sqrt{r^2-e^2}}{r+\sqrt{r^2-e^2}}+\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{r}{e};\\
&F_2 = \frac{r-\sqrt{r^2-e^2}}{r^2\left(r+\sqrt{r^2-e^2}\right)};\\
&F_3 = -2+\frac{e^2}{r^2};\\
&J_1 = \int\limits_e^r r_1\sqrt{r_1^2-e^2}\,\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r_1}\,\mathrm{d}r_1;\\
&J_2 = \int\limits_r^{R_0}\frac{r_1}{r_1+\sqrt{r_1^2-e^2}}\,\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r_1}\,\mathrm{d}r_1;\\
&J_3 = \int\limits_e^r r_1\sqrt{r_1^2-e^2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{r_1}{e}\,\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r_1}\,\mathrm{d}r_1
\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots \quad (5.10).$$

Wir haben folgende Zahlenbeispiele durchgerechnet:

1. Kreissymmetrischer Berg:

$$\zeta(r) = \begin{cases}\dfrac{\zeta_0}{2}(1+\cos 2\pi r) & \text{für} \quad r \leqq {}^1/_2,\\[2mm] 0 & \text{für} \quad r \geqq {}^1/_2;\end{cases}$$

Bergdurchmesser $B = 200$ km; Berghöhe $\zeta_0 = 0{,}1$.

Anströmgeschwindigkeit a) $|\mathfrak{V}^*_\infty| = 10$ cm sec^{-1} (also $R = 1{,}37$ km)

b) $|\mathfrak{V}^*_\infty| = 20$ cm sec^{-1} (also $R = 2{,}74$ km).

Das Ergebnis der Rechnung ist in den Bildern 1a und 1b wiedergegeben. Sie zeigen den Stromlinienverlauf in der Grundrißprojektion und darunter das Bergprofil im Aufriß. Bei der kleineren Geschwindigkeit erhält man einen geschlossenen Wirbel mit relativ geringer Geschwindigkeit. Insgesamt hat das Strömungsbild gewisse Ähnlichkeit mit dem Strömungsfeld um einen in eine Parallelströmung eingebetteten Einzelpotentialwirbel. Nach (2.3) handelt es sich bei unserem Problem um eine Verschmierung von Wirbeln über den Berg. Die den Rechnungen zugrunde gelegten Geschwindigkeiten interessieren ihrer Kleinheit entsprechend im Hinblick auf Meeresströmungen. Bei den wesentlich größeren Geschwindigkeiten atmosphärischer Strömungen sind die Ablenkungen entsprechend kleiner.

Bild 1a.

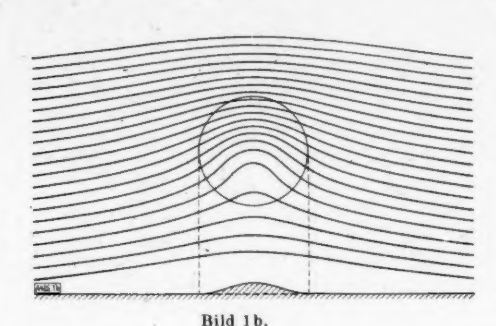


Bild 1b.

Bild 1a. Strömung über einen kreissymmetrischen Berg von 200 km Durchmesser und der Höhe 0,1 H. Oben die Stromlinien und der Berg im Grundriß, unten das Bergprofil im Aufriß. Anströmgeschwindigkeit 10 cm sec⁻¹.

Bild 1b. Entsprechende Darstellung für eine Anströmgeschwindigkeit von 20 cm sec⁻¹.

Bild 2 (links). Strömung über einen Berg mit elliptischen Höhenlinien (Achsenverhälthis 1:3) Bergbreite 200 km, Höhe 0,1 H. Anströmgeschwindigkeit 20 cm sec⁻¹.

2. Elliptischer Berg:

$$\zeta(r) = \begin{cases} \dfrac{\zeta_0}{2}\left(1 + \cos\pi\,\dfrac{r-e}{R_0 - e}\right) & \text{für} \quad e \leqq r \leqq R_0, \\ 0 & \text{für} \quad r \geqq R_0. \end{cases}$$

Randellipse $E(R_0)$: $\dfrac{x^2}{R_0^2} + \dfrac{y^2}{R_0^2 - e^2} = 1$ mit $R_0 = 1{,}5$ und $e = \sqrt{2}$ (Achsenverhältnis also $1:3$); $B = 200$ km; Berghöhe $\zeta_0 = 0{,}1$; $|\mathfrak{B}_\infty^*| = 20$ cm sec⁻¹ (also Trägheitskreisradius $R = 2{,}74$).

Im Bild 2 ist der Berg durch ein Aufrißprofil und durch die Höhenlinien $\zeta = 0$; $0{,}05$; $0{,}1$ im Grundriß dargestellt. Die Stromlinien weisen wieder einen geschlossenen Wirbel auf.

§ 6. Abschätzung für die Reihe (4.7).

Für die Gültigkeit der obigen Ergebnisse ist noch der Nachweis zu erbringen, daß wir im Rahmen unserer Theorie der ersten Ordnung die Reihe (4.7) nach dem Glied mit A_0' abbrechen dürfen. Dabei beschränken wir uns auf den Sonderfall $e = 0$. Für $e \to \infty$ gehen unsere Ergebnisse in die von Görtler für den zweidimensionalen Fall der Strömungen über unendlich lange Gebirgskämme über. Hier spielt in der Gl. (4.1) das Glied $\dfrac{1}{1-\zeta}$ Grad $A \cdot$ Grad ζ keine ins Gewicht fallende Rolle. Es ist daher schon von vorneherein wahrscheinlich, daß auch für andere e-Werte dieses Glied im Rahmen unserer Genauigkeitsansprüche bedeutungslos ist.

Mit leicht verständlichen Abkürzungen ist

$$\operatorname{Grad}_P A_{n+1}'(P) = -\iint\limits_{\text{Berg}} \operatorname{Grad}_P \log r^*(P, P') \cdot \psi_{n+1}(P')\,\mathrm{d}\,\omega_{P'};$$

$$\psi_{n+1}(P') = \iint\limits_{\text{Berg}} K(P', P'')\,\psi_n(P'')\,\mathrm{d}\,\omega_{P''};$$

$$K(P', P'') = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-\zeta(P')}\operatorname{Grad}_{P'}\zeta(P') \cdot \operatorname{Grad}_{P'}\log r^*(P', P'');$$

also:

$$\psi_{n+1}(P') = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-\zeta(P')}\operatorname{Grad}_{P'}\zeta(P') \cdot \iint\limits_{\text{Berg}} \operatorname{Grad}_{P'}\log r^*(P', P'')\,\psi_n(P'')\,\mathrm{d}\,\omega_{P''}.$$

Somit schließlich

$$\operatorname{Grad}_P A'_{n+1}(P) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\text{Berg}} \operatorname{Grad}_P \log r^*(P,P') \frac{1}{1-\zeta(P')} \operatorname{Grad}_{P'} \zeta(P') \cdot \operatorname{Grad}_{P'} A'_n(P')\, d\omega_{P'}.$$

In unserm Falle ist $\operatorname{Grad}_{P'} \zeta(P') \cdot \operatorname{Grad}_{P'} A'_n(P') = \frac{d\zeta(r')}{dr'}\frac{d A'_n(r')}{dr'}$; $\frac{\partial}{\partial\varphi} A'_n(P) = 0$. Ferner erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial r} A'_{n+1}(P) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{R_0}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r}\log r^*(P,P') \frac{1}{1-\zeta(r')}\frac{d\zeta}{dr'}\frac{dA'_n}{dr'} r'\, dr'\, d\varphi'$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{r} \frac{1}{1-\zeta(r')}\frac{d\zeta}{dr'}\frac{dA'_n}{dr'} r'\, dr' \int\limits_0^{2\pi} \frac{r - r'\cdot\cos(\varphi-\varphi')}{r^{*2}}\, d\varphi'.$$

(Das $\int\limits_r^{R_0}\int\limits_0^{2\pi}$ verschwindet bekanntlich: Ein homogener Kreisring übt auf innere Punkte keine Anziehung aus!).

$$\frac{\partial}{\partial r} A'_{n+1}(P) = -\frac{1}{r}\int\limits_0^{r} \frac{1}{1-\zeta(r')}\frac{d\zeta}{dr'}\frac{dA'_n}{dr'} r'\, dr'.$$

Gilt nun stets $\frac{d\zeta}{dr} \leqq 0$, so erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial r} A'_{n+1}(P) = -\frac{\partial A'_n}{\partial r}(P^*) \frac{1}{1-\zeta(P^*)}\frac{1}{r}\int\limits_0^{r} r' \frac{d\zeta}{dr'}\, dr'$$

$$= -\frac{\partial A'_n}{\partial r}(P^*)\frac{1}{1-\zeta(P^*)}\left\{\zeta(r) - \frac{1}{r}\int\limits_0^{r}\zeta(r')\, dr'\right\},$$

wo P^* einen mittleren Punkt auf dem Berg bezeichnet. Daher wegen:

$$\zeta(r) - \frac{1}{r}\int\limits_0^{r}\zeta(r')\,dr' = \frac{1}{r}\int\limits_0^{r} r'\frac{d\zeta}{dr'}\,dr' \leqq 0 \quad \text{und} \quad \zeta(r) \geqq 0$$

$$\max\left|\frac{\partial}{\partial r} A'_{n+1}(P)\right| < \max_{\text{Berg}}\left|\frac{\partial A_n}{\partial r}\right| \cdot \frac{\zeta_{\max}}{1-\zeta_{\max}} \qquad (6.1).$$

Nehmen wir etwa $\zeta_{\max} = 0{,}1$ an, so folgt:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial A'_n}{\partial r}\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\partial A'_n}{\partial r}\right| < \max_{\text{Berg}}\left|\frac{\partial A'_0}{\partial r}\right| \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\zeta_{\max}}{1-\zeta_{\max}}\right)^n$$

$$= \max_{\text{Berg}}\left|\frac{\partial A'_0}{\partial r}\right| \frac{\frac{\zeta_{\max}}{1-\zeta_{\max}}}{1-\frac{\zeta_{\max}}{1-\zeta_{\max}}}$$

$$= \max_{\text{Berg}}\left|\frac{\partial A'_0}{\partial r}\right| \frac{1}{9}\frac{1}{1-{}^1/_9}$$

$$= \max_{\text{Berg}}\left|\frac{\partial A'_0}{\partial r}\right| \cdot \frac{1}{8}.$$

Diese Abschätzung ist sehr grob. Sie lehrt jedoch bereits, daß das von uns berücksichtigte Glied A'_0 den wesentlichen Störungsanteil wiedergibt. Es ist bemerkenswert, daß bei dieser Abschätzung nur $\zeta_{\max}$ und nicht $|\operatorname{Grad}\zeta|$ eine Rolle spielt. Zumindest beim Berge mit kreisförmigen Höhenlinien ist die frühere scharfe Forderung $|\operatorname{Grad}\zeta| \ll 1$ also überflüssig. Man darf erwarten, daß dies auch im allgemeinen Fall gilt.

Zur Stabilität der elastischen Schalen I.

Von *Ernst-August Deuker* in Hannover.

In der vorliegenden Arbeit werden die Untersuchungen über endliche Verformungen eines Kontinuums und die aus ihnen abzuleitenden Stabilitätskriterien des elastischen Gleichgewichts, wie ich sie an anderer Stelle [3][1]) für den allgemeinen dreidimensionalen Körper angestellt habe, auf dünne elastische Schalen übertragen. Es werden deshalb zunächst die Grundgleichungen der Schalentheorie für endliche Verformungen entwickelt, als notwendige Grundlage für Stabilitätsuntersuchungen. Die Heranziehung der Methoden und Ergebnisse der Differentialgeometrie, insbesondere die konsequente Anwendung der Tensorrechnung, ermöglicht nicht nur, allgemeine Formeln von großer Durchsichtigkeit zu entwickeln, sondern erleichtert auch die Behandlung spezieller Probleme. In dieser Arbeit wird das an dem Beispiel der Kreiszylinderschale, in einer weiteren an dem der Kugelschale gezeigt werden.

I. Der Formänderungstensor.

Eine Schale wird begrenzt durch zwei (auch im unverformten Zustand) gekrümmte Flächen, ihre Laibungen, deren Abstand, die Schalenstärke h, gegenüber den anderen Abmessungen der Schale als klein vorausgesetzt wird. Diejenige zwischen den beiden Laibungen liegende Fläche, die überall die Schalenstärke halbiert, heißt Mittelfläche. Die geringe Schalenstärke ermöglicht folgende Annahmen (als hinreichende Annäherung) für den Verformungszustand der Schale einzuführen, die wir nach W. Flügge[2]) geben:

a) „Die bei der Verformung der Schale eintretende Verschiebung eines beliebigen Punktes sei durch die Verschiebung des zugehörigen Punktes der Mittelfläche derart bestimmt, daß die Normalen zur Mittelfläche auch nach der Verformung zur neuen Mittelfläche normal sind."

b) „Die Spannungskomponente normal zur Mittelfläche sei überall so klein im Vergleich zu den anderen, daß ihr Einfluß auf die Formänderungen vernachlässigt werden kann."

Gewöhnlich wird weiter noch gefordert, daß die Verschiebungen klein gegen die Schalenstärke sind, um die Linearisierung der Schalengleichungen zu ermöglichen. Da wir größere Verschiebungen nicht von vornherein ausschließen, sehen wir von dieser Annahme zunächst ab.

Wir unterscheiden ein raumfestes und ein körperfestes Koordinatensystem. Das körperfeste System passen wir den Annahmen über die Verformung der Schale an. Es ist so gewählt, daß $q_3 = 0$ die Gleichung der Mittelfläche ist. q_1 und q_2 sind geeignete Parameter auf der Mittelfläche. q_3 ist der Abstand eines Punktes von der Mittelfläche und läuft im Intervall $-\frac{h}{2} \leqq q_3 \leqq +\frac{h}{2}$. Die Wahl des raumfesten Systems ist beliebig.

Wir betrachten nun eine einparametrige Schar von Formänderungszuständen der Schale, die nach Voraussetzung bereits durch die einparametrige Schar der zugehörigen Mittelflächen bestimmt sind. Ist das raumfeste System ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem, so haben die Raumkoordinaten der Schalenpunkte als Funktionen der körperfesten Koordinaten und des Parameters t die besondere Gestalt:

$$x_i = \varphi_i(q_\varrho, t) + q_3 \zeta_i(q_\varrho, t) \qquad \varrho = 1, 2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1.1).$$

Die Funktionen $\varphi_i(q_\varrho, t)$ bestimmen für jeden Wert von t die Mittelfläche der Schale, $\zeta_i(q_\varrho, t)$ sind die Komponenten des Einheitsvektors in Richtung der Normalen. Der Parameterwert $t = 0$ kennzeichnet die unverformte Schale. Ihre Koordinaten sind gegeben durch die Funktionen:

$$\left.\begin{aligned} x_i^{(0)} &= \varphi_i(q_\varrho, 0) + q_3 \zeta_i(q_\varrho, 0) \\ &= \varphi_i^{(0)}(q_\varrho) + q_3 \zeta_i^{(0)}(q_\varrho) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1.1\,\mathrm{a}).$$

Das Quadrat des Abstandes zweier Schalenpunkte mit den Koordinaten q_ϱ, q_3 bzw. $q_\varrho + \mathrm{d}q^\varrho$, $q_3 + \mathrm{d}q^3$ ist gegeben durch das Bogenelement:

$$\mathrm{d}s^2 = m_{\varrho\sigma}\,\mathrm{d}q^\varrho\,\mathrm{d}q^\sigma + (\mathrm{d}q^3)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1.2)$$

mit

$$m_{\varrho\sigma}(q_\lambda, q_3, t) = g_{\varrho\sigma}(q_\lambda, t) - 2 q_3 \varkappa_{\varrho\sigma}(q_\lambda, t) + q_3^2 c_{\varrho\sigma}(q_\lambda, t).$$

[1]) Die eingeklammerten Ziffern beziehen sich auf das Schrifttumsverzeichnis am Schluß der I. Teils der Arbeit.
[2]) Vgl. [6].

Im unverformten Zustand war die Entfernung derselben Punkte gegeben durch:

$$d s_0^2 = m_{\varrho\sigma}^{(0)} \, d q^\varrho \, d q^\sigma + (d q^3)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1.2a)$$

mit

$$m_{\varrho\sigma}^{(0)}(q_\lambda, q_3) = g_{\varrho\sigma}^{(0)}(q_\lambda) - 2 q_3 \varkappa_{\varrho\sigma}^{(0)}(q_\lambda) + q_3^2 c_{\varrho\sigma}^{(0)}(q_\lambda).$$

In den Gl. (1.2) sind die $g_{\varrho\sigma}(q_\lambda, t)$ die Koeffizienten der ersten Fundamentalform der Mittelfläche, die Komponenten des Maßtensors, die $\varkappa_{\varrho\sigma}(q_\lambda, t)$ die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform, die kovarianten Komponenten des Krümmungstensors, und die $c_{\varrho\sigma}(q_\lambda, t)$ die Koeffizienten der dritten Fundamentalform der Mittelfläche. Die $c_{\varrho\sigma}$ lassen sich durch die kovarianten und gemischten Komponenten des Krümmungstensors darstellen und zwar gilt:

$$c_{\varrho\sigma} = \varkappa_{\varrho\mu} \varkappa_\sigma^\mu \text{ [3]} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1.3).$$

Der Formänderungstensor hat nur drei von Null verschiedene Komponenten, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{\varrho\sigma}(q_\lambda, q_3, t) &= \frac{1}{2}\left(m_{\varrho\sigma} - m_{\varrho\sigma}^{(0)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(g_{\varrho\sigma} - g_{\varrho\sigma}^{(0)}\right) - q_3\left(\varkappa_{\varrho\sigma} - \varkappa_{\varrho\sigma}^{(0)}\right) + \frac{1}{2} q_3^2 \left(\varkappa_{\varrho\mu}\varkappa_\sigma^\mu - \varkappa_{\varrho\mu}^{(0)} \overset{(0)}{\varkappa}{}_\sigma^\mu\right) \\ \varepsilon_{\varrho 3} &= 0; \quad \varepsilon_{33} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1.4).$$

Da vorausgesetzt worden war, daß die Schalenstärke h klein gegenüber den Hauptkrümmungsradien der Mittelfläche ist, sind die $(q_3)^2$ enthaltenden Anteile der $m_{\varrho\sigma}$ und $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ klein gegenüber den anderen Termen. Sie werden deshalb in der Literatur meistens von vornherein nicht berücksichtigt. Wir wollen jedoch quadratische Glieder in q_3 zunächst beibehalten und nur an geeigneter Stelle von der Möglichkeit, sie zu vernachlässigen, Gebrauch machen. Wir berechnen das algebraische Komplement der $m_{\varrho\sigma}$, d. h. die kontravarianten Komponenten des Maßtensors. Sie erhalten, wenn wir nach Potenzen von q_3 entwickeln und nach den quadratischen Gliedern abbrechen, die Werte:

$$m^{\varrho\sigma} = g^{\varrho\sigma} + 2 q_3 \varkappa^{\varrho\sigma} + 3 q_3^2 \varkappa^{\varrho\mu} \varkappa_\mu^\sigma \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1.5).$$

Die Determinante der Matrix $(m_{\varrho\sigma})$ bestimmt sich mit der gleichen Annäherung zu:

$$|m_{\varrho\sigma}| = m = g\,\{1 - 4 q_3 H + q_3^2 (4 H^2 + 2) K\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1.6)$$

und daraus

$$\sqrt{m} = \sqrt{g}\,\{1 - 2 q_3 H + q_3^2 K\}.$$

Dabei bedeuten:

$H = \frac{1}{2} \varkappa_\sigma^\sigma$ die mittlere Krümmung.

$K = \left|\varkappa_\varrho^\sigma\right| = \varkappa_1^1 \varkappa_2^2 - \varkappa_2^1 \varkappa_1^2$ das Gaußsche Krümmungsmaß der Mittelfläche.

Beschränkt man sich nicht auf sehr kleine Formänderungen, so lassen sich dem kovarianten Verzerrungstensor $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ die zwei gemischten Tensoren zuordnen[4]):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\sigma^\varrho &= m^{\lambda\varrho} \varepsilon_{\lambda\sigma} \\ &= \frac{1}{2}\left(\delta_\sigma^\varrho - g^{\lambda\varrho} g_{\lambda\sigma}^{(0)}\right) - q_3\left(\varkappa^{\lambda\varrho} g_{\lambda\sigma}^{(0)} - g^{\lambda\varrho} \varkappa_{\lambda\sigma}^{(0)}\right) \\ &\quad + q_3^2\left(2 \varkappa^{\lambda\varrho} \varkappa_{\lambda\sigma}^{(0)} - \frac{3}{2} \varkappa^{\lambda\mu} \varkappa_\mu^\varrho g_{\lambda\sigma}^{(0)} - \frac{1}{2} g^{\lambda\varrho} \varkappa_{\lambda\mu}^{(0)} \overset{(0)}{\varkappa}{}_\sigma^\mu\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (1.7)$$

und

$$\left.\begin{aligned} {}'\varepsilon_\varrho^\sigma &= m_{(0)}^{\mu\sigma} \varepsilon_{\mu\varrho} \\ &= \frac{1}{2}\left(g_{(0)}^{\mu\sigma} g_{\mu\varrho} - \delta_\varrho^\sigma\right) - q_3\left(g_{(0)}^{\mu\sigma} \varkappa_{\mu\varrho} - \varkappa_{(0)}^{\mu\sigma} g_{\varrho\mu}\right) \\ &\quad + q_3^2\left(\frac{1}{2} g_{(0)}^{\mu\sigma} \varkappa_{\varrho\tau} \varkappa_\mu^\tau + \frac{3}{2} g_{\varrho\mu} \varkappa_{(0)}^{\sigma\tau} \overset{(0)}{\varkappa}{}_\tau^\mu - 2 \varkappa_{(0)}^{\sigma\mu} \varkappa_{\varrho\mu}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (1.7a).$$

II. Der Spannungszustand einer Schale.

Es seien $s_\lambda^\mu(q_\sigma, q_3, t)$; s_3^μ; s_λ^3; s_3^3 $(\lambda, \mu = 1, 2)$ die gemischten Komponenten des symmetrischen Spannungstensors, bezogen auf das körperfeste System der q_1, q_2, q_3. Sind ${}_{(\sigma)}t_\lambda$; ${}_{(\sigma)}t_3$; ${}_{(3)}t_\lambda$; ${}_{(3)}t_3$ die kovarianten Komponenten der drei Spannungsvektoren auf den drei Ko-

[3]) Vgl. [4] Bd. I, Kp. IV, § 4. [4]) Vgl. [3].

ordinatenflächen $q_\alpha = \text{const}$ und $q_3 = \text{const}$, so bestehen zwischen ihnen und den Komponenten des Spannungstensors die Gleichungen [5]:

$$\left.\begin{aligned} {}_{(\alpha)}t_\lambda &= \frac{s^\alpha_\lambda}{\sqrt{m^{\alpha\alpha}}}\,; & {}_{(\alpha)}t_3 &= \frac{s^\alpha_3}{\sqrt{m^{\alpha\alpha}}} \\ {}_{(3)}t_\lambda &= s^3_\lambda\,; & {}_{(3)}t_3 &= s^3_3 \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2.1).$$

Bezeichnet man ferner mit

$$\left.\begin{aligned} {}_{(\alpha)}n_\mu &= \frac{1}{\sqrt{m^{\alpha\alpha}}}\,{}_{(\alpha)}\delta_\mu\,; & {}_{(\alpha)}n_3 &= 0 \\ {}_{(3)}n_\mu &= 0\,; & {}_{(3)}n_3 &= 1 \end{aligned} \quad \left({}_{(\alpha)}\delta_\mu = \begin{cases} 1 & \mu = \alpha \\ 0 & \mu \neq \alpha \end{cases}\right)\right\} \quad \dots\dots \quad (2.2)$$

die kovarianten Komponenten des Einheitsvektors in Richtung der Normalen der Koordinatenflächen $q_\alpha = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$ mit n_μ, n_3 die Komponenten der Normale einer beliebigen Schnittfläche, so ist (2.1) in der für beliebige Schnittflächen gültigen Gleichung

$$\left.\begin{aligned} t_\lambda &= s^\mu_\lambda\, n_\mu + s^3_\lambda\, n_3 \\ t_3 &= s^\mu_3\, n_\mu + s^3_3\, n_3 \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (2.3)$$

enthalten.

Die geringe Schalenstärke erlaubt es, den Spannungszustand der Schale zu vereinfachen. Diese Vereinfachung besteht darin, daß man auf die Kenntnis der genauen Verteilung der Spannungen über die Schalenstärke verzichten und sich auf ihre Resultierenden und auf die resultierenden Momente in bezug auf eine in der Mittelfläche liegende Achse beschränken kann.

Wir legen einen Schnitt durch die Schale senkrecht zur Mittelfläche und betrachten die jedem Punkt des Schnittes zugeordneten Spannungsvektoren. Um die in der ganzen Schnittfläche übertragene Kraft zu bestimmen, hat man die Summe der Spannungsvektoren, d. h. das Integral über die Schnittfläche, zu bilden.

Wir machen uns von der Länge des Schnittes frei, indem wir die in dem Schnitt übertragene Kraft auf die Längeneinheit der Schnittlinie mit der Mittelfläche beziehen. Die verbleibende Integration der Spannungsvektoren über die Schalenstärke ist jetzt ohne weiteres möglich, da diese sich längs der Normalen ohne Änderung ihrer Komponenten parallel in den zugehörigen Punkt der Mittelfläche verschieben lassen. Man erhält z. B. für die Komponenten der in einer Schnittfläche $q_1 = \text{const}$ übertragenen Kraft pro Längeneinheit der q_2-Linie die Darstellungen:

$$\left.\begin{aligned} {}_{(1)}P_\lambda &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} {}_{(1)}t_\lambda \sqrt{m_{22}}\, \mathrm{d}\, q_3 \\ {}_{(1)}P_3 &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} {}_{(1)}t_3 \sqrt{m_{22}}\, \mathrm{d}\, q_3 \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2.4).$$

Führt man in die Gl. (2.4) die Komponenten des Spannungstensors nach (2.1) ein, so gehen sie über in:

$$\left.\begin{aligned} {}_{(1)}P_\lambda &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} s^1_\lambda \sqrt{\frac{m_{22}}{m^{11}}}\, \mathrm{d}\, q_3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} s^1_\lambda \sqrt{m}\, \mathrm{d}\, q_3 \qquad \left(m^{11} = \frac{m_{22}}{m}\right) \\ {}_{(1)}P_3 &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} s^1_3 \sqrt{m}\, \mathrm{d}\, q_3 \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (2.5).$$

[5]) Vgl. [3].

Es ist $\sqrt{m} = \sqrt{g}\{1 - 2q_3 H + q_3^2 K\}$, enthält also den von q_3 abhängigen invarianten Faktor $\{1 - 2q_3 H + q_3^2 K\}$.

Wir führen nun folgende Abkürzungen ein:

$$\left.\begin{aligned} \text{a)}\quad T_\lambda^\mu &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} s_\lambda^\mu \{1 - 2q_3 H + q_3^2 K\}\, \mathrm{d}\, q_3 \\ \text{b)}\quad N^\mu &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} s_3^\mu \{1 - 2q_3 H + q_3^2 K\}\, \mathrm{d}\, q_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{(2.6)}.$$

In die Integrale (2.6) geht die spezielle Schnittrichtung nicht mehr ein, sie definieren auf der Mittelfläche im Falle

a) einen Tensor, den Längskrafttensor,

b) einen Vektor, den Querkraftvektor.

Man beachte, daß N^μ die kontravarianten Komponenten eines in jedem Punkt der Mittelfläche definierten Flächenvektors sind, der aber keineswegs eine Kraft **in** der Fläche bedeutet.

Durch die Größen T_λ^μ; N^μ sind die in einem Schnitt senkrecht zur Schalenmittelfläche übertragenen Kräfte pro Längeneinheit vollständig bestimmt. So erhält man z. B. für die in einem Schnitt $q_1 = \text{const}$ wirkenden Kräfte (2.5) die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} {}_{(1)}P_\lambda &= T_\lambda^1 \sqrt{\frac{g}{g_{22}}} = T_\lambda^1 \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} = T_\lambda^\mu\, {}_{(1)}l_\mu \\ {}_{(1)}P_3 &= N^1 \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} = N^\mu\, {}_{(1)}l_\mu \end{aligned}\right\} \quad \text{(2.5a)},$$

wobei ${}_{(1)}l_\mu$ die kovarianten Komponenten der Tangentialnormale der Koordinatenlinie $q_1 = \text{const}$ sind. Entsprechend gilt für einen beliebigen Schnitt senkrecht zur Mittelfläche:

$$P_\lambda = T_\lambda^\mu\, l_\mu; \quad P_3 = N^\mu\, l_\mu \quad \text{(2.7)}.$$

Die Gl. (2.7) sind das Analogon zu den Gl. (2.3).

Die Verschiebung der Spannungsvektoren längs der Normale in den entsprechenden Punkt der Mittelfläche führt zu Kräftepaaren mit dem Hebelarm q_3. Wir bilden in ganz analoger Weise ihre Summen z. B.:

$${}_{(1)}m_\lambda = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} q_3\, s_\lambda^1 \sqrt{m}\, \mathrm{d}\, q_3 \quad \text{(2.8)}.$$

Zu dem Längskrafttensor T_λ^μ tritt also als zweiter Tensor:

$$M_\lambda^\mu = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} q_3\, s_\lambda^\mu \{1 - 2q_3 H + q_3^2 K\}\, \mathrm{d}\, q_3 \quad \text{(2.9)}$$

der **Momententensor**.

Die in Richtung der Schalennormale fallenden Komponenten der Spannungsvektoren führen zu keinem Moment.

Über die anschaulich zu deutenden Tensoren T_λ^μ, M_λ^μ und den Vektor N^μ hinaus, wäre es durchaus möglich, weitere Größen zu betrachten, indem man die Integrale über die mit höheren Potenzen von q_3 multiplizierten Spannungskomponenten heranzieht. Diese Mittelwerte höherer Ordnung sind jedoch klein gegenüber T_λ^μ, M_λ^μ und N^μ. Sie können deshalb vernachlässigt werden.

Wir müssen nun noch einiges über die Spannungen in einer Schnittfläche parallel zur Mittelfläche, d. h. in den Flächen $q_3 = \text{const}$, ausführen. Die zugehörigen Spannungsvektoren sind:

$${}_{(3)}t_\lambda = s_\lambda^3; \quad {}_{(3)}t_3 = s_3^3 \quad \text{(2.10)}.$$

Wir bilden die Integrale:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\quad \overline{N}_\lambda = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} s^3_\lambda \{1-2q_3 H + q_3^2 K\}\, \mathrm{d}q_3 \\ &\text{b)}\quad N_{(3)} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} s^3_3 \{1-2q_3 H + q_3^2 K\}\, \mathrm{d}q_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2.11).$$

Der Vektor mit den kovarianten Komponenten $\overline{N}_\lambda$ entspricht dem kovarianten Querkraftvektor, weil $\int q_3\, s^3_\lambda \{\ldots\}\, \mathrm{d}q_3$ gleich Null gesetzt worden ist. Man kann also schreiben:

$$\overline{N}_\lambda = g_{\lambda\mu} N^\mu = N_\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.12).$$

Der Mittelwert $N_{(3)}$ der Normalspannung s^3_3 spielt für die weiteren Rechnungen keine Rolle. Es ist jedoch $N_{(3)}$ zweckmäßig aufzunehmen, um ein widerspruchsfreies Gleichgewichtssystem für die oben eingeführten Spannungsgrößen der Schale aufzustellen.

Wir sind bei der Definition der Längskräfte und Momente von den gemischten Komponenten des Spannungstensors ausgegangen. Es wäre auch möglich gewesen, die kontravarianten Komponenten des Spannungstensors heranzuziehen. Die mit ihnen gebildeten Integrale sind aber nicht identisch mit den kontravarianten Komponenten der Tensoren (2.6) bzw. (2.9); denn diese Komponenten sind mit dem Maßtensor $g^{\lambda\mu}$ der Mittelfläche zu bilden, während die $s^{\mu\lambda}$ durch Vermittlung des Maßtensors $m^{\lambda\mu}$ aus den gemischten Komponenten s^μ_λ hervorgehen, so daß bei der Integration abweichende Glieder auftreten. Der Längskrafttensor ist deshalb im allgemeinen nicht mehr symmetrisch. Man hat nämlich:

$$\left.\begin{aligned} T^{\mu\lambda} &= g^{\lambda\varrho} T^{\mu}_{\cdot\varrho} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} g^{\lambda\varrho} s^\mu_\lambda \{1-2q_3 H + q_3^2 K\}\, \mathrm{d}q_3 \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} s^{\mu\lambda}\{\ldots\}\, \mathrm{d}q_3 - 2\varkappa^{\lambda\varrho} M^\mu_\varrho \\ T^{\lambda\mu} &= g^{\mu\varrho} T^{\cdot\lambda}_{\varrho} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} s^{\mu\lambda}\{\ldots\}\, \mathrm{d}q_3 - 2\varkappa^{\mu\varrho} M^\lambda_\varrho \\ T^{\mu\lambda} - T^{\lambda\mu} &= 2(\varkappa^{\mu\varrho} M^\lambda_\varrho - \varkappa^{\lambda\varrho} M^\mu_\varrho) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2.13).$$

Die Abweichungen sind praktisch ziemlich unbedeutend, insbesondere beim Momententensor, für den ähnliches gilt.

III. Die Gleichungen des Gleichgewichts.

Ist der durch $t = t_0$ gekennzeichnete Formänderungszustand der Schale ein Gleichgewichtszustand, so hat der Spannungstensor $s^\mu_\lambda \ldots$ den drei Differentialgleichungen

$$\frac{\mathfrak{d} s^\mu_\lambda}{\mathfrak{d} q^\mu} + \frac{\mathfrak{d} s^3_\lambda}{\mathfrak{d} q^3} = 0, \quad \frac{\mathfrak{d} s^\mu_3}{\mathfrak{d} q^\mu} + \frac{\mathfrak{d} s^3_3}{\mathfrak{d} q^3} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.1)$$

zu genügen [6]). Von der Aufnahme einer Massenkraft in den Gl. (3.1) sehen wir ab, da man sie gegebenenfalls durch eine Oberflächenbelastung ersetzen kann. Das Symbol $\mathfrak{d}$ bedeutet die kovariante Ableitung in bezug auf das körperfeste System mit der für $t = t_0$ maßgebenden Metrik. Schreibt man die kovarianten Ableitungen in (3.1) für das gewählte körperfeste System aus, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(s^\mu_\lambda \sqrt{m})}{\partial q^\mu} + \frac{\partial(s^3_\lambda \sqrt{m})}{\partial q^3} - \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} s^\mu_\sigma \sqrt{m} = 0 \\ \frac{\partial(s^\mu_3 \sqrt{m})}{\partial q^\mu} + \frac{\partial(s^3_3 \sqrt{m})}{\partial q^3} - \Gamma^\sigma_{3\mu} s^\mu_\sigma \sqrt{m} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.2).$$

---

[6]) Vgl. [3].

$\Gamma^\sigma_{\lambda\mu}$, $\Gamma^\sigma_{3\mu}$ sind die Christoffelschen Dreizeigerzeichen zweiter Art im q_1, q_2, q_3 System, deren Abhängigkeit von der Koordinate q_3 festzustellen ist. Nach Gl. (1.2a) folgt:

$$\Gamma_{\lambda\mu,\varrho} = \begin{bmatrix}\lambda\,\mu\\ \varrho\end{bmatrix} - 2\,q_3\,K_{\lambda\mu,\varrho} \quad \ldots \ldots \quad (3.3),$$

wobei $\begin{bmatrix}\lambda\,\mu\\ \varrho\end{bmatrix}$ die Dreizeigerzeichen erster Art der Mittelfläche sind, und $K_{\lambda\mu,\varrho}$ zur Abkürzung für

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \varkappa_{\lambda\varrho}}{\partial q^\mu} + \frac{\partial \varkappa_{\mu\varrho}}{\partial q^\lambda} - \frac{\partial \varkappa_{\lambda\mu}}{\partial q^\varrho}\right\}$$

gesetzt ist. Wir beschränken uns hier auf die in q_3 linearen Glieder, da wir in Ziffer II bei den Momenten stehen geblieben sind. Ferner gilt:

$$\Gamma_{3\mu,\varrho} = -\Gamma_{\varrho\mu,3} = -\varkappa_{\varrho\mu} + q_3\,\varkappa_{\varrho\nu}\,\varkappa^\nu_\mu \quad \ldots \ldots \quad (3.3\text{a}).$$

Aus (3.3) und (3.3a) bestimmen sich die Dreizeigerzeichen zweiter Art zu:

$$\left.\begin{aligned}\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} &= m^{\sigma\varrho}\,\Gamma_{\lambda\mu,\varrho} = \begin{Bmatrix}\lambda\,\mu\\ \sigma\end{Bmatrix} - 2\,q_3\left\{g^{\varrho\sigma}\,K_{\lambda\mu,\varrho} - \varkappa^{\varrho\sigma}\begin{bmatrix}\lambda\,\mu\\ \varrho\end{bmatrix}\right\}\\ \Gamma^\sigma_{3\mu} &= -\varkappa^\sigma_\mu - q_3\,\varkappa^\sigma_\varrho\,\varkappa^\varrho_\mu\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3.4).$$

Wir setzen die vorstehenden Ausdrücke in die Gl. (3.2) ein und integrieren über die Schalenstärke. Wegen des in jedem Glied auftretenden Faktors $\sqrt{m}$ führt die Integration auf die in (2.6) und (2.9) eingeführten Größen, deren zweckmäßige Definition hier deutlich in Erscheinung tritt. Die über die Schalenstärke integrierten Gl. (3.2) ergeben:

$$\left.\begin{aligned}&\text{a)}\ \frac{\partial(T^\mu_\lambda\sqrt{g})}{\partial q^\mu} - \begin{Bmatrix}\lambda\,\mu\\ \sigma\end{Bmatrix} T^\mu_\sigma\sqrt{g}\\ &\qquad + 2\left\{g^{\varrho\sigma}\,K_{\lambda\mu,\varrho} - \varkappa^{\varrho\sigma}\begin{bmatrix}\lambda\,\mu\\ \varrho\end{bmatrix}\right\} M^\mu_\sigma\sqrt{g} + (s^3_\lambda\sqrt{m})\Big|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = 0\\ &\text{b)}\ \frac{\partial(N^\mu\sqrt{g})}{\partial q^\mu} + \varkappa^\sigma_\mu\,T^\mu_\sigma\sqrt{g} + \varkappa^\sigma_\varrho\,\varkappa^\varrho_\mu\sqrt{g} + (s^3_3\sqrt{m})\Big|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3.5).$$

Sie sind die Bedingungen dafür, daß die Resultierende aller auf die Mittelfläche bezogenen Kräfte verschwindet. Die noch fehlenden drei Momentengleichungen erhält man, wenn man die Gl. (3.2) mit q_3 multipliziert und wieder über die Schalenstärke integriert. Sie lauten:

$$\left.\begin{aligned}&\text{a)}\ \frac{\partial(M^\mu_\lambda\sqrt{g})}{\partial q^\mu} - \begin{Bmatrix}\lambda\,\mu\\ \sigma\end{Bmatrix} M^\mu_\sigma\sqrt{g} - N_\lambda\sqrt{g} = 0\\ &\text{b)}\ -N_{(3)}\sqrt{g} + \varkappa^\sigma_\mu\,M^\mu_\sigma\sqrt{g} = 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3.6).$$

In den Gl. (3.5) und (3.6) erkennt man in den Termen von gleichartigem Aufbau die verjüngte kovariante Ableitung der Tensoren T^μ_λ und M^μ_λ sowie die des Vektors N^μ [7]), die wir wieder mit dem Symbol $\mathfrak{d}$ bezeichnen wollen, bezogen aber jetzt auf das q_1, q_2 Koordinatensystem der Mittelfläche. Der Klammerausdruck

$$g^{\varrho\sigma}\,K_{\lambda\mu,\varrho} - \varkappa^{\varrho\sigma}\begin{bmatrix}\lambda\,\mu\\ \varrho\end{bmatrix}$$

erhält durch die Einführung der kovarianten Ableitung eine recht einfache Form. Es ist:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\{\frac{\mathfrak{d}\varkappa_{\lambda\varrho}}{\mathfrak{d}q^\mu} + \frac{\mathfrak{d}\varkappa_{\mu\varrho}}{\mathfrak{d}q^\lambda} - \frac{\mathfrak{d}\varkappa_{\lambda\mu}}{\mathfrak{d}q^\varrho}\right\} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\varkappa_{\lambda\varrho}}{\partial q^\mu} + \frac{\partial\varkappa_{\mu\varrho}}{\partial q^\lambda} - \frac{\partial\varkappa_{\lambda\mu}}{\partial q^\varrho}\right\}\\ &- \frac{1}{2}\left[\begin{Bmatrix}\mu\,\lambda\\ \tau\end{Bmatrix}\varkappa_{\tau\varrho} + \begin{Bmatrix}\mu\,\varrho\\ \tau\end{Bmatrix}\varkappa_{\lambda\tau} + \begin{Bmatrix}\lambda\,\mu\\ \tau\end{Bmatrix}\varkappa_{\tau\varrho} + \begin{Bmatrix}\lambda\,\varrho\\ \tau\end{Bmatrix}\varkappa_{\tau\mu} - \begin{Bmatrix}\lambda\,\varrho\\ \tau\end{Bmatrix}\varkappa_{\tau\mu} - \begin{Bmatrix}\varrho\,\mu\\ \tau\end{Bmatrix}\varkappa_{\tau\lambda}\right]\end{aligned}$$

$$K_{\lambda\mu,\varrho} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\mathfrak{d}\varkappa_{\lambda\varrho}}{\mathfrak{d}q^\mu} + \frac{\mathfrak{d}\varkappa_{\mu\varrho}}{\mathfrak{d}q^\lambda} - \frac{\mathfrak{d}\varkappa_{\lambda\mu}}{\mathfrak{d}q^\varrho}\right\} + \begin{Bmatrix}\lambda\,\mu\\ \tau\end{Bmatrix}\varkappa_{\tau\varrho}.$$

Nach den Formeln von Mainardi-Codazzi gilt ferner [8]):

[7]) Man kann auch statt der Tensoren T^μ_λ, M^μ_λ und des Vektors N^μ die Tensordichten $T^\mu_\lambda\sqrt{g}$, $M^\mu_\lambda\sqrt{g}$ und die Vektordichte $N^\mu\sqrt{g}$ einführen.

[8]) Vgl. [4] Bd. I, Kap. V, § 4.

$$\frac{\partial \varkappa_{\lambda\varrho}}{\partial q^\mu} = \frac{\partial \varkappa_{\lambda\mu}}{\partial q^\varrho},$$

also ist:

$$K_{\lambda\mu,\varrho} = \frac{1}{2}\frac{\partial \varkappa_{\mu\varrho}}{\partial q^\lambda} + \begin{Bmatrix}\lambda\,\mu\\ \tau\end{Bmatrix}\varkappa_{\tau\varrho}$$

$$g^{\varrho\sigma} K_{\lambda\mu,\varrho} - \varkappa^{\varrho\sigma}\begin{bmatrix}\lambda\,\mu\\ \varrho\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial \varkappa^\sigma_\mu}{\partial q^\lambda}.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen erhalten damit die sehr übersichtliche Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \frac{\partial T^\mu_\lambda}{\partial q^\mu} + \frac{\partial \varkappa^\sigma_\mu}{\partial q^\lambda} M^\mu_\sigma + \left(s^3_\lambda\{1 - 2q_3 H + q_3^2 K\}\right)^{+\frac{h}{2}}_{-\frac{h}{2}} = 0\\
&\text{b)}\quad \frac{\partial N^\mu}{\partial q^\mu} + \varkappa^\sigma_\mu T^\mu_\sigma + \varkappa^\sigma_\varrho \varkappa^\varrho_\mu M^\mu_\sigma + \left(s^3_3\{\ldots\}\right)^{+\frac{h}{2}}_{-\frac{h}{2}} = 0\\
&\text{c)}\quad \frac{\partial M^\mu_\lambda}{\partial q^\mu} - N_\lambda = 0\\
&\text{d)}\quad N_{(3)} = \varkappa^\sigma_\mu M^\mu_\sigma
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3.7).$$

Die Bedeutung der einzelnen Gleichungen ist leicht zu erkennen. Die zwei Gl. (3.7a) sind die Verallgemeinerungen der Gleichgewichtsbedingungen eines ebenen Spannungszustandes, wobei die Differenzen der Schubspannungen auf den Laibungen der Schale den Massenkräften entsprechen. Es treten hier Zusatzglieder auf, welche die Komponenten des Momententensors enthalten. Sie haben ihre Ursache in den bei der Verbiegung der Schale zwischen den Flächen parallel zur Mittelfläche auftretenden Schubspannungen, deren Summe über die Schalenstärke nicht verschwindet, weil dem Ebenbleiben der Schnitte senkrecht zur Mittelfläche keine lineare Verteilung der Spannungen über die Schalenstärke entspricht. Die Gl. (3.7a) sind jedoch von den anderen Gleichungen auch ohne die Zusatzglieder nicht unabhängig, sondern sie sind durch die Krümmung der Mittelfläche mit der Gl. (3.7b) gekoppelt, die das Gleichgewicht aller Kräfte in Richtung der Schalennormalen zum Ausdruck bringt. Die beiden Gl. (3.7c) dienen nur zur Definition der Querkräfte als Divergenz des Momententensors und sind das Analogon zu der aus der Balkentheorie bekannten Beziehung.

Die letzte Gl. (3.7d) steht unabhängig neben den übrigen fünf. Sie kann im folgenden unberücksichtigt bleiben, da die Normalkraft $N_{(3)}$ nicht weiter interessiert. Die Querkräfte lassen sich leicht eliminieren, so daß nur die drei wesentlichen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \frac{\partial T^\mu_\lambda}{\partial q^\mu} + \frac{\partial \varkappa^\sigma_\mu}{\partial q^\lambda} M^\mu_\sigma + \left[s^3_\lambda\{1 - 2q_3 H + q_3^2 K\}\right]^{+\frac{h}{2}}_{-\frac{h}{2}} = 0\\
&\text{b)}\quad \frac{\partial^2 M^{\mu\sigma}}{\partial q^\sigma \partial q^\mu} + \varkappa^\sigma_\mu T^\mu_\sigma + \varkappa^\sigma_\varrho \varkappa^\varrho_\mu M^\mu_\sigma + \left[s^3_3\{\ldots\}\right]^{+\frac{h}{2}}_{-\frac{h}{2}} = 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3.8)$$

verbleiben. Diese Gleichungen reichen für sich nicht aus, die Längskräfte und Momente der Schale zu bestimmen. Es ist vielmehr notwendig, das Stoffgesetz zu kennen, das Spannungen und Formänderungen miteinander verknüpft und aus dem dann der Zusammenhang zwischen den Längskräften, Momenten und den Verschiebungen der Schalenpunkte folgt. Wir betrachten deshalb jetzt die Formänderungsarbeit.

IV. Die Formänderungsarbeit.

Die dünne Schale ist ein Beispiel für einen elastischen Körper, dessen Punkte größere Verschiebungen erfahren können, ohne daß mit ihnen gleichzeitig die Verzerrungen groß werden. Wir wählen deshalb den Ansatz für die Formänderungsarbeit so, daß er dem in der eingangs erwähnten Arbeit angegebenen entspricht[9]). Es ist nur der Faktor $\frac{1}{m-2}$ durch $\frac{1}{m-1}$ zu ersetzen. Man erhält so den Ausdruck:

$$A = G\iiint \left\{'\varepsilon^\varrho_\sigma \varepsilon^\sigma_\varrho + \frac{'e\,e}{m-1}\right\}\sqrt{m_0}\,dq^1\,dq^2\,dq^3 \quad 'e = '\varepsilon^\sigma_\sigma;\ e = \varepsilon^\sigma_\sigma \quad \ldots\ldots (4.1).$$

Für die $\varepsilon^\sigma_\varrho$ bzw. $'\varepsilon^\varrho_\sigma$ hat man die Werte (1.7) und (1.7a) einzusetzen. Der Integrand in (4.1) wird ein Polynom in q_3 mit Koeffizienten, die sich aus dem Maß- und Krümmungstensoren

[9]) Vgl. [3]

der verformten und unverformten Mittelfläche aufbauen. Die Integration nach q_3 läßt sich ausführen, wobei höhere als zweite Potenzen von q_3 im Sinne der vorhergegangenen Festsetzungen zu vernachlässigen sind. Auch die Spannungs-Dehnungsgleichungen, die sich auf Grund des Ansatzes (4.1) ergeben, sind unmittelbar zu übertragen und lauten:

$$s^\mu_\lambda \sqrt{m} = 2\,G \left\{ {}'\varepsilon^\mu_\lambda + \delta^\mu_\lambda \frac{{}'e}{m-1} - {}'\varepsilon^\mu_\varrho\, {}'\varepsilon^\varrho_\lambda - \delta^\mu_\lambda \frac{{}'\varepsilon^\varrho_\sigma\, {}'\varepsilon^\sigma_\varrho}{m-1} \right\} \sqrt{m_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.2).$$

Aus den Gl. (4.2) lassen sich in Verbindung mit den Gl. (1.7a) nach der in Ziffer II angegebenen Konstruktion die Beziehungen herleiten, welche die Längskräfte und Momente mit den Formänderungen verknüpfen. Die nach Einführung der Verschiebungen in (4.1) nach den Sätzen der Variationsrechnung aufzustellenden nicht linearen Differentialgleichungen sind jedoch mit den heutigen Hilfsmitteln der Analysis unangreifbar. Es gelingt leider nicht, alle bei vorgegebener Belastung möglichen Gleichgewichtslagen zu überblicken, was das ideale Ziel einer Stabilitätstheorie ist, sondern man muß sich darauf beschränken, eine spezielle Gleichgewichtslage auf ihre Stabilität zu untersuchen. Nimmt man die Berechnung der Grundlösung als erledigt an, so konzentrieren sich die Stabilitätsbetrachtungen auf die Untersuchung der zweiten Variation der potentiellen Energie, die für eine stabile Gleichgewichtslage positiv definit sein muß.

Die Anwendung des Energieprinzips im Sinne der Variationsrechnung setzt ein nicht lineares Elastizitätsgesetz, z. B. in der Form (4.2) voraus, und man muß im Formänderungstensor mindestens noch die quadratischen Glieder in den Verschiebungen und ihren Ableitungen berücksichtigen. Es ist nun die Frage, ob es sich durch eine Annahme über die Grundlösung nicht vermeiden läßt, daß man die Formänderungen bis zu den quadratischen Gliedern in den Verschiebungen und ihren Ableitungen zu berechnen hat. Diese Überlegungen knüpfen zweckmäßig an die Gleichungen des Gleichgewichts (3.8) an.

V. Die Stabilitätsgleichungen.

Unter dem Einfluß der Belastung habe sich in der Schale ein Spannungs- und Formänderungszustand ausgebildet, der die Randbedingungen erfüllt. Er wird durch die Verschiebungen beschrieben, welche die Punkte der Mittelfläche erfahren. Die Zusammenhänge zwischen diesen Verschiebungen und den Tensoren T^μ_λ und M^μ_λ (und damit T^μ_λ und M^μ_λ selbst) seien bekannt. Ferner sind dann auch der Krümmungstensor und der Maßtensor der verformten Mittelfläche bekannt. Innere und äußere Kräfte sind im Gleichgewicht, d. h., die Gleichgewichtsbedingungen (3.8) sind erfüllt. Wir betrachten nun einen benachbarten Spannungs- und Formänderungszustand, der durch den Parameterwert $t_0 + \Delta t$ gekennzeichnet werde. Soll auch jetzt noch Gleichgewicht vorhanden sein, so müssen die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein für die an der Stelle $t_0 + \Delta t$ gebildeten Größen. Bildet man nun die Differenz entsprechender Gleichungen, dividiert durch Δt und geht zur Grenze $\Delta t \to 0$ über, so erhält man die Ableitungen der Gl. (3.8) nach t an der Stelle $t = t_0$, die also bestehen müssen, wenn es zu einem Gleichgewichtszustand infinitesimal benachbarte Gleichgewichtslagen geben soll. Die Variationsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\quad \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\mathfrak{d}\, T^\mu_\lambda}{\mathfrak{d}\, q^\mu} + \frac{\mathfrak{d}\, \varkappa^\sigma_\mu}{\mathfrak{d}\, q^\lambda} M^\mu_\sigma + \left(s^3_\lambda \{1 - 2\,q_3\,H + q_3^2\,K\}\right)^{+\frac{h}{2}}_{-\frac{h}{2}}\right]_{t=t_0} = 0 \\ &\text{b)}\quad \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\mathfrak{d}^2 M^{\mu\sigma}}{\mathfrak{d}\, q^\sigma\, \mathfrak{d}\, q^\mu} + \varkappa^\sigma_\mu\, T^\mu_\sigma + \varkappa^\sigma_\varrho\, \varkappa^\varrho_\mu\, M^\mu_\sigma + \left(s^3_3 \{\ldots\}\right)^{+\frac{h}{2}}_{-\frac{h}{2}}\right]_{t=t_0} = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.1)$$

sind drei homogene lineare Differentialgleichungen für die virtuellen Verrückungen, denen homogene Randbedingungen zugeordnet sind. Bekanntlich hat ein System homogener Differentialgleichungen mit homogenen Randbedingungen im allgemeinen keine von Null verschiedene Lösung, wenn die in ihm auftretenden Parameter fest vorgegeben sind. Nur wenn die Lastparameter in (5.1) bestimmte Werte annehmen, die den Eigenwerten des Systems bei den vorgelegten Randbedingungen entsprechen, existieren von Null verschiedene Lösungen und damit benachbarte Gleichgewichtslagen. Wählt man das Stoffgesetz in der Form (4.2), so sind bei gegebener Grundlösung die Ableitungen der Längskräfte und Momente nach t als Funktionen der virtuellen Geschwindigkeiten festgelegt, und die Gl. (5.1) sind dann im wesentlichen identisch mit den Jacobischen Differentialgleichungen, die der zweiten Variation der potentiellen Energie zugeordnet sind.

Die auf Stabilität zu untersuchenden Grundlösungen haben nun in vielen Fällen die Eigenschaft, daß die zugehörigen Verschiebungen der Schalenpunkte und deren Ableitungen

so klein bleiben, daß sie mit den Grundspannungen linear nach dem Hookeschen Gesetz verknüpft werden können. Man denke z. B. an die geschlossene Kugelschale unter gleichmäßigen äußeren Normaldruck. Hier bleibt die Gestalt der Schalenmittelfläche überhaupt erhalten, es ändert sich nur der Kugelradius, wobei aber höhere als erste Potenzen dieser Änderung bei der Berechnung der Grundlösung durchaus vernachlässigt werden können. Bei den Gleichgewichtsbedingungen (3.8) hat die Vernachlässigung höherer Potenzen der Verschiebungen zur Folge, daß die Veränderungen, welche die Dreizeigerzeichen und Krümmungen der verformten Mittelfläche gegenüber denen der unverformten Mittelfläche erfahren, nicht in Erscheinung treten.

Es sind also die kovarianten Ableitungen auf die unverformte Mittelfläche, d. h. auf die für $t=0$ geltende Metrik zu beziehen. Es ist dann zweckmäßig, den Längskräften und Momenten der Grundlösung den Parameterwert $t=0$ zuzuordnen (in Abweichung von den früheren Festsetzungen, bei denen Formänderungen und Spannungen für $t=0$ verschwanden). Setzt man nun in die variierten Gleichgewichtsbedingungen (5.1) $t=0$ statt $t=t_0$ ein, so bieten die neuen Stabilitätsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\quad \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\mathfrak{d}\, T^{\mu}_{\lambda}}{\mathfrak{d}\, q^{\mu}}+\frac{\mathfrak{d}\,\varkappa^{\sigma}_{\mu}}{\mathfrak{d} q^{\lambda}} M^{\mu}_{\sigma}+\left(s^{3}_{\lambda}\{1-2\,q_3 H+q_3^2 K\}\right)^{+\frac{h}{2}}_{-\frac{h}{2}}\right]_{t=0}=0 \\ &\text{b)}\quad \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\mathfrak{d}^2 M^{\mu\sigma}}{\mathfrak{d}\, q^{\sigma}\,\mathfrak{d}\, q^{\mu}}+\varkappa^{\sigma}_{\mu}\, T^{\mu}_{\sigma}+\varkappa^{\sigma}_{\varrho}\,\varkappa^{\varrho}_{\mu} M^{\mu}_{\sigma}+\left(s^{3}_{3}\{\ldots\}\right)^{+\frac{h}{2}}_{-\frac{h}{2}}\right]_{t=0}=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5.2)$$

gegenüber den Gl. (5.1) den Vorteil, daß man sich bei der Berechnung der Formänderungen auf die in den Verschiebungen linearen Terme beschränken kann, und die Variationen der Längskräfte und Momente mit den virtuellen Verrückungen nach dem Hookeschen Gesetz verknüpft werden. Die Stabilitätsgleichungen (5.2) können allerdings nicht mehr die Eulerschen Gleichungen eines Variationsproblems sein. Die vorstehenden Betrachtungen gelten natürlich nicht, wenn bereits der Grundlösung große Verschiebungen der Schalenpunkte zugeordnet sind. Für Platten und Schalen kommen nun gerade solche Fälle als Stabilitätsprobleme wohl kaum in Betracht. Will man dagegen die nach Überschreiten der Stabilitätsgrenze mögliche Gleichgewichtslage berechnen, so muß man auf die ursprünglichen nichtlinearen Gl. (3.8) in Verbindung mit einem geeigneten Stoffgesetz, bzw. auf die Formänderungsarbeit (4.1) zurückgreifen. Die Erweiterung des Ansatzes der Formänderungsarbeit auf endliche Verschiebungen kann ja in verschiedener Art geschehen. Wieweit die neuen Gleichgewichtslagen davon abhängen, ist eine andere Frage. Die Stabilitätsgrenzen jedenfalls, die man nach den verschiedenen Verfahren ermittelt, dürfen nicht wesentlich voneinander abweichen, wenn die Grundlösung noch dem gewöhnlichen Elastizitätsgesetz gehorcht, da dann sowohl die vereinfachten Stabilitätsgleichungen (5.2) wie auch die verschiedenen Erweiterungen des Energieansatzes als gleichberechtigt anzusehen sind. Wir werden deshalb zur Kontrolle die Stabilitätsgrenze in einigen Beispielen einmal mittels der Gl. (5.2) und ein zweites Mal auf Grund des Ansatzes (4.1) berechnen. Es ist zu erwarten, daß die Differentialgleichungen, die der zweiten Variation der potentiellen Energie entspringen, etwas komplizierter sein werden, als die Gl. (5.2), da sich der Energieansatz nicht in dem Maße auf die besondere Eigenschaft der Grundlösung zuschneiden läßt. Aus den obigen Überlegungen geht noch hervor, daß auch der an den Vorschlag von E. Trefftz anschließende Ansatz[10]):

$$\bar{A}=G\iiint\left\{{}'\varepsilon^{\varrho}_{\sigma}\,{}'\varepsilon^{\sigma}_{\varrho}+\frac{{}'e^2}{m-1}\right\}\sqrt{m_0}\,\mathrm{d}\,q^1\,\mathrm{d}\,q^2\,\mathrm{d}\,q^3 \quad \ldots\ldots \quad (5.3)$$

für die Formänderungsarbeit (statt des hier gewählten Ausdruckes) zum Ziele führen muß. Der Ansatz (4.1) erweist sich aber in manchen Fällen z. B. besonders bei der Kugelschale als vorteilhafter.

VI. Der Zusammenhang zwischen den Formänderungsgrößen und den Verschiebungen.

Um den Maßtensor und den Krümmungstensor der verformten Mittelfläche in möglichst einfacher Weise durch die Verschiebungen auszudrücken, welche die Punkte der Mittelfläche bei der Verformung erfahren, ist es zweckmäßig, ein raumfestes Koordinatensystem x_i, x_3 $(i=1,2)$ so zu wählen, daß es mit dem körperfesten System im unverformten Zustand zusammenfällt. Das Bogenelement hat in einem solchen System entsprechend Gl. (1.2) die Gestalt:

$$\mathrm{d}\,s^2=l_{ik}(x_j, x_3)\,\mathrm{d}\,x^i\,\mathrm{d}\,x^k+(\mathrm{d}\,x^3)^2 \quad \ldots\ldots \quad (6.1)$$

mit

$$l_{ik}(x_j, x_3)=a_{ik}(x_j)-2\,x_3\,b_{ik}(x_j)+x_3^2\,b_{il}\,b^{l}_{k}.$$

---

[10]) [10].

Die Gleichung der unverformten Mittelfläche ist dann einfach:

$$x_i^{(0)} = \delta_{i\varrho}\, q_\varrho \quad \ldots \quad (6.2),$$

wo $\delta_{i\varrho} = \begin{cases} 1 & i = \varrho \\ 0 & i \neq \varrho \end{cases}$ ist, aber keinen Tensor vorstellt. Die Funktionen $a_{ik}(x_j)$; $b_{ik}(x_j)$ entsprechen den Komponenten des Maßtensors bzw. Krümmungstensors der unverformten Mittelfläche nach den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} g_{\varrho\sigma}^{(0)} &= a_{ik}\left(x_j^{(0)}\right)\delta_\varrho^i\,\delta_\sigma^k \\ \varkappa_{\varrho\sigma}^{(0)} &= b_{ik}\left(x_j^{(0)}\right)\delta_\varrho^i\,\delta_\sigma^k \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6.3).$$

Die Raumkoordinaten der verformten Mittelfläche setzen wir in der Form:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \varphi_i(q_\lambda, t) = \delta_{i\varrho}\, q_\varrho + v_i(q_\lambda, t) \\ x_3 &= v_3(q_\lambda, t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6.4)$$

an. Die Abhängigkeit des Maßtensors $g_{\varrho\sigma}(q_\lambda, t)$ von den Verschiebungen ist nun leicht zu übersehen. Man erhält:

$$\left.\begin{aligned} g_{\varrho\sigma}(q_\lambda, t) &= l_{ik}[\varphi_j(q_\lambda, t), v_3]\left\{\delta_\varrho^i + \frac{\partial v^i}{\partial q^\varrho}\right\}\cdot\left\{\delta_\sigma^k + \frac{\partial v^k}{\partial q^\sigma}\right\} + \frac{\partial v_3}{\partial q^\varrho}\,\frac{\partial v_3}{\partial q^\sigma} \\ &= \left\{a_{ik}[\varphi_j(q_\lambda, t)] - 2\, v_3\, b_{ik}(\varphi_j) + v_3^2\, b_{il}\, b_k^l\right\}\cdot\left\{\delta_\varrho^i + \frac{\partial v^i}{\partial q^\varrho}\right\}\cdot\left\{\delta_\sigma^k + \frac{\partial v^k}{\partial q^\sigma}\right\} + \frac{\partial v_3}{\partial q^\varrho}\,\frac{\partial v_3}{\partial q^\sigma} \end{aligned}\right\} \quad (6.5).$$

Wir entwickeln die Gl. (6.5) nach Potenzen der Verschiebungen und ihren Ableitungen, und brechen zunächst bei den linearen Gliedern ab, mit denen wir bei einer Stabilitätsuntersuchung nach Ziffer V auskommen. Die Gl. (6.5) vereinfachen sich dann erheblich und man erhält:

$$g_{\varrho\sigma}(q_\lambda, t) = g_{\varrho\sigma}^{(0)}(q_\lambda) + \frac{\partial g_{\varrho\sigma}^{(0)}}{\partial q^\mu}\, v^\mu + g_{\varrho\mu}^{(0)}\,\frac{\partial v^\mu}{\partial q^\sigma} + g_{\sigma\mu}^{(0)}\,\frac{\partial v^\mu}{\partial q^\varrho} - 2\,\varkappa_{\varrho\sigma}^{(0)}\, v_3 \quad \ldots \quad (6.6).$$

Wir haben durch die Schreibweise in (6.6) bereits zum Ausdruck gebracht, daß die Verschiebungen v^μ in diesem Falle als kontravariante Komponenten eines Verschiebungs**vektors** im ursprünglichen q_ϱ-System aufzufassen sind. Die Normalverschiebung v_3 ist ein Skalar. Die Gl. (6.6) erhalten durch die Einführung der kovarianten Ableitung, die mit $\mathfrak{d}^{(0)}$ bezeichnet sei, um anzudeuten, daß sie sich auf das unverformte q_ϱ-System bezieht, die einfache Gestalt:

$$g_{\varrho\sigma} = g_{\varrho\sigma}^{(0)} + \frac{{}^{(0)}\mathfrak{d}\, v_\sigma}{\mathfrak{d}\, q^\varrho} + \frac{{}^{(0)}\mathfrak{d}\, v_\varrho}{\mathfrak{d}\, q^\sigma} - 2\,\varkappa_{\varrho\sigma}^{(0)}\, v_3 \quad \ldots \quad (6.7).$$

Die Beziehungen zwischen dem Krümmungstensor und den zweiten Ableitungen der Raumkoordinaten x_i, x_3 nach den Flächenkoordinaten q_ϱ erhält man am einfachsten über die **Gauß**schen Ableitungsgleichungen der Differentialgeometrie[11]. Ist y_i $(i = 1, 2, 3)$ ein beliebiges raumfestes System, $y_i = y_i(q_\varrho)$ die Gleichung der Fläche, so erhalten sie die Form:

$$\varkappa_{\varrho\sigma}\,\zeta^i = \frac{\partial^2 y^i}{\partial q^\varrho\,\partial q^\sigma} + \Gamma_{jk}^i\,\frac{\partial y^j}{\partial q^\varrho}\,\frac{\partial y^k}{\partial q^\sigma} - \begin{Bmatrix}\varrho\sigma\\ \mu\end{Bmatrix}\frac{\partial y^i}{\partial q^\mu} \qquad i, j, k = 1, 2, 3;\quad \varrho, \sigma, \mu = 1, 2 \quad \ldots \quad (6.8).$$

In den Gl. (6.8) bedeuten ζ^i die kontravarianten Raumkomponenten der Flächennormale, Γ_{jk}^i die Dreizeigerzeichen des Raumsystems und $\begin{Bmatrix}\varrho\sigma\\ \mu\end{Bmatrix}$ die der Fläche. Andererseits gilt für die kovarianten Komponenten der Normale die Darstellung:

$$\zeta_i = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}}\,\varepsilon_{ikl}\,\frac{\partial y^k}{\partial q^1}\,\frac{\partial y^l}{\partial q^2} \qquad l = |l_{ik}| \quad \ldots \quad (6.9).$$

Der Tensor ε_{ikl} verschwindet, wenn zwei Indizes gleich werden und ist gleich $+1$ für gerade Permutationen von 1, 2, 3, dagegen -1 für ungerade Permutationen mit $\varepsilon_{123} = +1$. Multipliziert man (6.8) und (6.9) skalar miteinander, so erhält man die Gleichung:

$$\varkappa_{\varrho\sigma} = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}}\left\{\varepsilon_{ikl}\,\frac{\partial^2 y^i}{\partial q^\varrho\,\partial q^\sigma}\,\frac{\partial y^k}{\partial q^1}\,\frac{\partial y^l}{\partial q^2} + \varepsilon_{ikl}\,\Gamma_{rj}^i\,\frac{\partial y^r}{\partial q^\varrho}\,\frac{\partial y^j}{\partial q^\sigma}\,\frac{\partial y^k}{\partial q^1}\,\frac{\partial y^l}{\partial q^2}\right\} \quad \ldots \quad (6.10),$$

die für die Berechnung des Krümmungstensors maßgebend ist. Die Gl. (6.10) werden wieder besonders einfach, wenn man das spezielle Raumsystem mit der Metrik (6.1) benutzt. Be-

[11] [4].

schränkt man sich ferner auf lineare Glieder in den Verschiebungen, so erhält man für die Komponenten des Krümmungstensors der verformten Mittelfläche die Ausdrücke:

$$\varkappa_{\varrho\sigma} = \varkappa^{(0)}_{\varrho\sigma} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial q^\varrho\,\partial q^\sigma} - \begin{Bmatrix}\varrho\sigma\\ \mu\end{Bmatrix}^{(0)} \frac{\partial v_3}{\partial q^\mu} - \varkappa^{(0)}_{\varrho\mu}\,\overset{(0)}{\varkappa}{}^{\mu}_{\sigma}\, v_3 + \varkappa^{(0)}_{\varrho\mu}\frac{\partial v^\mu}{\partial q^\sigma} + \varkappa^{(0)}_{\sigma\mu}\frac{\partial v^\mu}{\partial q^\varrho} + \frac{\partial \varkappa^{(0)}_{\varrho\sigma}}{\partial q^\mu}\, v^\mu \quad . \quad . \quad (6.11).$$

Wir führen auch hier die kovariante Ableitung ${}^{(0)}\mathfrak{d}$ ein und erhalten nach einer kleinen Umrechnung:

$$\varkappa_{\varrho\sigma} = \varkappa^{(0)}_{\varrho\sigma} + \frac{{}^{(0)}\mathfrak{d}^2 v_3}{\mathfrak{d} q^\varrho\,\mathfrak{d} q^\sigma} - \varkappa^{(0)}_{\varrho\mu}\,\overset{(0)}{\varkappa}{}^{\mu}_{\sigma}\, v_3 + \varkappa^{(0)}_{\varrho\mu}\frac{{}^{(0)}\mathfrak{d} v^\mu}{\mathfrak{d} q^\sigma} + \varkappa^{(0)}_{\sigma\mu}\frac{{}^{(0)}\mathfrak{d} v^\mu}{\mathfrak{d} q^\varrho} + \frac{{}^{(0)}\mathfrak{d}\, \varkappa^{(0)}_{\varrho\sigma}}{\mathfrak{d} q^\mu}\, v^\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.11\,\text{a}),$$

wenn man noch beachtet, daß die kovariante Ableitung eines Skalars mit der gewöhnlichen Ableitung übereinstimmt, also auch $\frac{\mathfrak{d} v_3}{\mathfrak{d} q^\sigma}$ geschrieben werden kann. Aus (6.11 a) ergeben sich mit Hilfe der kontravarianten Komponenten des Maßtensors:

$$g^{\mu\varrho} = g^{\mu\varrho}_{(0)} - g^{\lambda\mu}_{(0)}\frac{{}^{(0)}\mathfrak{d} v^\varrho}{\mathfrak{d} q^\lambda} - g^{\lambda\varrho}_{(0)}\frac{{}^{(0)}\mathfrak{d} v^\mu}{\mathfrak{d} q^\lambda} + 2\,\varkappa^{\mu\varrho}_{(0)}\, v_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.7\,\text{a})$$

die gemischten Komponenten des Krümmungstensors zu:

$$\varkappa^{\mu}_{\sigma} = \overset{(0)}{\varkappa}{}^{\mu}_{\sigma} + g^{\varrho\mu}_{(0)}\frac{{}^{(0)}\mathfrak{d}^2 v_3}{\mathfrak{d} q^\varrho\,\mathfrak{d} q^\sigma} + \overset{(0)}{\varkappa}{}^{\mu}_{\lambda}\,\overset{(0)}{\varkappa}{}^{\lambda}_{\sigma}\, v_3 + \overset{(0)}{\varkappa}{}^{\mu}_{\lambda}\frac{{}^{(0)}\mathfrak{d} v^\lambda}{\mathfrak{d} q^\sigma} - \overset{(0)}{\varkappa}{}^{\lambda}_{\sigma}\frac{{}^{(0)}\mathfrak{d} v^\mu}{\mathfrak{d} q^\lambda} + \frac{\mathfrak{d}\,\overset{(0)}{\varkappa}{}^{\mu}_{\sigma}}{\mathfrak{d} q^\lambda}\, v^\lambda \quad . \quad . \quad . \quad (6.11\,\text{b}).$$

Wir haben nun noch die Dreizeigerzeichen des verformten Systems bis zu den linearen Gliedern in den Verschiebungen zu bestimmen. Wir bilden zu diesem Zweck die kovarianten Ableitungen $\frac{\mathfrak{d} g_{\varrho\sigma}}{\mathfrak{d} q^\lambda}$ bezogen auf das verformte System, die gemäß der Definition der kovarianten Ableitung alle identisch verschwinden. Setzt man nun für die $g_{\varrho\sigma}$ die rechten Seiten der Gl. (6.7) ein, so hat man nur die $g^{(0)}_{\varrho\sigma}$ im neuen System kovariant abzuleiten. Bei den folgenden Termen dagegen ist die Ableitung $\mathfrak{d}$ durch ${}^{(0)}\mathfrak{d}$ zu ersetzen, da nur lineare Glieder berücksichtigt werden sollen. Man erhält so die Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{d} g_{\varrho\sigma}}{\mathfrak{d} q^\lambda} = \frac{\mathfrak{d} g^{(0)}_{\varrho\sigma}}{\mathfrak{d} q^\lambda} + \frac{{}^{(0)}\mathfrak{d}}{\mathfrak{d} q^\lambda}\left(\frac{{}^{(0)}\mathfrak{d} v_\sigma}{\mathfrak{d} q^\varrho} + \frac{{}^{(0)}\mathfrak{d} v_\varrho}{\mathfrak{d} q^\sigma}\right) - 2\frac{{}^{(0)}\mathfrak{d}\,\varkappa^{(0)}_{\varrho\sigma}}{\mathfrak{d} q^\lambda}\, v_3 - 2\,\varkappa^{(0)}_{\varrho\sigma}\frac{\partial v_3}{\partial q^\lambda} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.12).$$

Bildet man nun die Kombination

$$\frac{\mathfrak{d} g_{\lambda\sigma}}{\mathfrak{d} q^\varrho} + \frac{\mathfrak{d} g_{\varrho\sigma}}{\mathfrak{d} q^\lambda} - \frac{\mathfrak{d} g_{\lambda\varrho}}{\mathfrak{d} q^\sigma}$$

so folgt, da

$$\frac{\mathfrak{d} g^{(0)}_{\lambda\sigma}}{\mathfrak{d} q^\varrho} + \frac{\mathfrak{d} g^{(0)}_{\varrho\sigma}}{\mathfrak{d} q^\lambda} - \frac{\mathfrak{d} g^{(0)}_{\lambda\varrho}}{\mathfrak{d} q^\sigma} = 2\begin{bmatrix}\lambda\varrho\\ \sigma\end{bmatrix}^{(0)} - 2\begin{Bmatrix}\lambda\varrho\\ \mu\end{Bmatrix} g^{(0)}_{\mu\sigma}$$

ist, aus (6.12) die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} 2\begin{Bmatrix}\lambda\varrho\\ \mu\end{Bmatrix} g^{(0)}_{\mu\sigma} = {} & 2\begin{bmatrix}\lambda\varrho\\ \sigma\end{bmatrix}^{(0)} + \frac{{}^{(0)}\mathfrak{d}}{\mathfrak{d} q^\varrho}\left[\frac{{}^{(0)}\mathfrak{d} v_\sigma}{\mathfrak{d} q^\lambda} + \frac{{}^{(0)}\mathfrak{d} v_\lambda}{\mathfrak{d} q^\sigma} - 2\,\varkappa^{(0)}_{\lambda\sigma}\, v_3\right] \\ & + \frac{{}^{(0)}\mathfrak{d}}{\mathfrak{d} q^\lambda}\left[\frac{{}^{(0)}\mathfrak{d} v_\sigma}{\mathfrak{d} q^\varrho} + \frac{{}^{(0)}\mathfrak{d} v_\varrho}{\mathfrak{d} q^\sigma} - 2\,\varkappa^{(0)}_{\varrho\sigma}\, v_3\right] - \frac{{}^{(0)}\mathfrak{d}}{\mathfrak{d} q^\sigma}\left[\frac{{}^{(0)}\mathfrak{d} v_\varrho}{\mathfrak{d} q^\lambda} + \frac{{}^{(0)}\mathfrak{d} v_\lambda}{\mathfrak{d} q^\varrho} - 2\,\varkappa^{(0)}_{\lambda\varrho}\, v_3\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6.13).$$

Die in (6.13) auftretenden zweiten gemischten kovarianten Ableitungen sind nicht ohne weiteres vertauschbar, wenn die Mittelfläche keine euklidische M_2 ist. Es gelten vielmehr die Beziehungen:

$$\frac{\mathfrak{d}^2 v_\sigma}{\mathfrak{d} q^\varrho\,\mathfrak{d} q^\lambda} - \frac{\mathfrak{d}^2 v_\sigma}{\mathfrak{d} q^\lambda\,\mathfrak{d} q^\varrho} = R^{\mu}_{\cdot\,\sigma\lambda\varrho}\, v_\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.14),$$

wobei $R^{\mu}_{\cdot\,\sigma\lambda\varrho}$ die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors sind. Beachtet man diese Beziehungen und die Formeln von Mainardi-Codazzi, so lauten die endgültigen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \begin{Bmatrix}\lambda\varrho\\ \mu\end{Bmatrix} = {} & \begin{Bmatrix}\lambda\varrho\\ \mu\end{Bmatrix}^{(0)} + \frac{1}{2}\left\{\frac{{}^{(0)}\mathfrak{d}^2 v^\mu}{\mathfrak{d} q^\lambda\,\mathfrak{d} q^\varrho} + \frac{{}^{(0)}\mathfrak{d}^2 v^\mu}{\mathfrak{d} q^\varrho\,\mathfrak{d} q^\lambda}\right\} + \frac{1}{2}\, g^{\mu\sigma}_{(0)}\left({}^{(0)}R^{\nu}_{\cdot\,\lambda\sigma\varrho} + {}^{(0)}R^{\nu}_{\cdot\,\varrho\sigma\lambda}\right) v_\nu \\ & - \frac{1}{2}\left(\frac{{}^{(0)}\mathfrak{d}\,\overset{(0)}{\varkappa}{}^{\mu}_{\lambda}}{\mathfrak{d} q^\varrho} + \frac{{}^{(0)}\mathfrak{d}\,\overset{(0)}{\varkappa}{}^{\mu}_{\varrho}}{\mathfrak{d} q^\lambda}\right) v_3 - \left(\overset{(0)}{\varkappa}{}^{\mu}_{\lambda}\frac{\partial v_3}{\partial q^\varrho} + \overset{(0)}{\varkappa}{}^{\mu}_{\varrho}\frac{\partial v_3}{\partial q^\lambda} - g^{\mu\sigma}_{(0)}\,\varkappa^{(0)}_{\lambda\varrho}\frac{\partial v_3}{\partial q^\sigma}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6.15)$$

VII. Einige Stabilitätsprobleme der Kreiszylinderschale.

Die in den Ziffern I bis VI entwickelten Grundlagen der Stabilitätstheorie dünner elastischer Schalen sollen nun durch einige Beispiele ergänzt werden. Der eigentlichen Stabilitätsuntersuchung hat die Bestimmung der Grundlösung, deren Eindeutigkeit festgestellt werden soll, vorauszugehen. Eine brauchbare Annäherung der Grundlösung wird in den meisten praktischen Fällen durch den in der Literatur als Membranlösung bezeichneten Spannungszustand gegeben. Um diese Membranlösung zu bestimmen, werden in den Gleichgewichtsbedingungen, die in Näherung auf die unverformte Mittelfläche bezogen werden, die Querkräfte und Momente gleich Null gesetzt. Die restlichen Gleichungen reichen dann aus, die Längskräfte ohne Heranziehung des Elastizitätsgesetzes zu berechnen. Das willkürliche Nullsetzen der Momente steht allerdings häufig nicht im Einklang mit der sich einstellenden Verformung. Die Abweichung ist bei dünnen Schalen aber so gering, daß sie unberücksichtigt bleiben kann. Von größerer Bedeutung ist es, daß die Membranlösung sich im allgemeinen nicht den vorgeschriebenen Randbedingungen anpassen läßt, so daß sich ein reiner Membranspannungszustand gar nicht ausbilden kann. Diese nicht zu unterschätzende Abweichung der Membranlösung von der wirklichen Lösung muß man in Kauf nehmen, um die Behandlung des Stabilitätsproblems nicht außerordentlich zu erschweren. Wir wollen die Frage nach den Randbedingungen an einem Stabilitätsproblem der Kreiszylinderschale untersuchen.

Eine kreiszylindrische Schale sei durch einen äußeren konstanten Normaldruck p [kgcm^{-2}] und durch eine pro Längeneinheit des Randes konstante Axialkraft P[kgcm^{-1}] beansprucht. Die Mittelfläche habe den Radius a. Berücksichtigt man zunächst nur den Normaldruck p, so wird unter seinem Einfluß die Mittelfläche in einen Kreiszylinder von etwas kleinerem Halbmesser übergehen, sofern die Radialverschiebung überall ungestört erfolgen kann. In praktischen Fällen sind freilich die Enden des Zylinders meist durch Böden versteift, so daß die Ränder an der Verschiebung nicht teilnehmen. Die Folge davon ist, daß die Mittelfläche sich biegt, und außer den Längskräften auch Momente und Querkräfte auftreten. Entsprechend wird sich der Zylinder unter der in Richtung der Erzeugenden wirkenden Kraft P verkürzen und obendrein etwas ausweiten, was ebenfalls an den Rändern nicht ungestört vonstatten geht. Ein reiner Membranspannungszustand kann sich bei der angegebenen Belastung offenbar nur einstellen, wenn die Grundlösung keine Randbedingungen für die Verschiebungen zu erfüllen braucht. Diese Grundlösung ist leicht anzugeben. Den Zusammenhang zwischen einem rechtwinkligen kartesischen x, y, z-System und dem der Schale angepaßten Zylinderkoordinatensystem x_1, x_2, x_3 wählen wir in der Form:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,(1+x_3)\cos x_1 \\ y &= a\,(1+x_3)\sin x_1 \\ z &= x_2 \end{aligned}\right\} \qquad (7.1).$$

Die Gleichung der unverformten Mittelfläche lautet in den Zylinderkoordinaten x_1, x_2, x_3:

$$x_1^{(0)} = q_1\,; \quad x_2^{(0)} = q_2\,; \quad x_3^{(0)} = 0 \qquad (7.1\,\mathrm{a})$$

bzw. im x, y, z-System:

$$x^{(0)} = a\cos q_1\,; \quad y^{(0)} = a\sin q_1\,; \quad z^{(0)} = q_2 \qquad (7.1\,\mathrm{b}).$$

Die Komponenten des Maßtensors und des Krümmungstensors erhalten die Werte

$$\left.\begin{aligned} &g_{11}^{(0)} = a^2\,; && g_{12}^{(0)} = 0\,; && g_{22}^{(0)} = 1 && \\ &\varkappa_{11}^{(0)} = -a\,; && \varkappa_{12}^{(0)} = 0\,; && \varkappa_{22}^{(0)} = 0 && \\ &\overset{(0)}{\varkappa}{}_1^1 = -\frac{1}{a}\,; && \overset{(0)}{\varkappa}{}_2^1 = 0\,; && \overset{(0)}{\varkappa}{}_1^2 = 0\,; && \overset{(0)}{\varkappa}{}_2^2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.2).$$

Die Dreizeigerzeichen verschwinden sämtlich, und die Gleichgewichtsbedingungen (3.8), bezogen auf die unverformte Mittelfläche, lauten einfach:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \overset{(0)}{T}{}_1^\mu}{\partial q^\mu} = 0\,; \quad \frac{\partial \overset{(0)}{T}{}_2^\mu}{\partial q^\mu} = 0 \\ &\frac{\partial^2 \overset{(0)}{M}{}^{\mu\lambda}}{\partial q^\lambda\,\partial q^\mu} - \frac{1}{a}\overset{(0)}{T}{}_1^1 + \frac{1}{a^2}\overset{(0)}{M}{}_1^1 - p\left(1+\frac{h}{2a}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.3).$$

Der Index $^{(0)}$ bei den Längskräften und Momenten soll andeuten, daß es sich um die entsprechenden Größen der Grundlösung handelt. Die Membranlösung der Gl. (7.3) lautet in unserem Fall:

$$\left.\begin{array}{ll} \overset{(0)}{T}{}^1_1 = -a p \left(1 + \frac{h}{2a}\right); & \overset{(0)}{T}{}^2_2 = -P \\ \overset{(0)}{T}{}^2_1 = 0; & \overset{(0)}{T}{}^1_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7.4),$$

wobei $\frac{h}{2a}$ ohne merkbaren Fehler gegenüber 1 vernachlässigt werden kann.

Wir behandeln das Stabilitätsproblem nach der in Ziffer V auseinandergesetzten Methode, und können uns deshalb auf die Variationen des Maß- und Krümmungstensors der verformten Mittelfläche beschränken. Nach den Gl. (6.7), (6.11) und (6.15) erhält man:

$$\left.\begin{array}{lll} \delta g_{11} = 2a^2 \{\delta \dot v_1 + \delta v_3\} & \delta \varkappa_{11} = a(\delta \ddot v_3 - \delta v_3 - 2\delta \dot v_1) & \\ \delta g_{12} = a^2 \delta v_1' + \delta \dot v_2 & \delta \varkappa_{12} = a(\delta \dot v_3' - \delta v_1') & \\ \delta g_{22} = 2\delta v_2' & \delta \varkappa_{22} = a\,\delta v_3'' & \\ \delta \varkappa^1_1 = \frac{1}{a}(\delta \ddot v_3 + \delta v_3) & \delta \varkappa^1_2 = \frac{1}{a}(\delta \dot v_3' - \delta v_1') & \\ \delta \varkappa^2_1 = a\left(\delta \dot v_3' + \frac{1}{a^2}\delta \dot v_2\right) & \delta \varkappa^2_2 = a\,\delta v_3'' & \\ \delta \left\{ {11 \atop 1} \right\} = \delta \ddot v_1 + \delta \dot v_3; & \delta \left\{ {11 \atop 2} \right\} = \delta \ddot v_2 - a^2 \delta v_3'; & \delta \left\{ {22 \atop 1} \right\} = \delta v_1'' \\ \delta \left\{ {22 \atop 2} \right\} = \delta v_2''; & \delta \left\{ {12 \atop 1} \right\} = \delta \dot v_1' + \delta v_3'; & \delta \left\{ {12 \atop 2} \right\} = \delta \dot v_2' \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (7.5).$$

In den Gl. (7.5) bedeuten, entsprechend einer in der Schalentheorie vielfach üblichen Bezeichnungsweise, Punkte Ableitungen nach q_1 und Striche Ableitungen nach q_2. Die Indizierung der Verschiebungen v_1 und v_2 hat **hier** keine Bedeutung im Sinne der Tensorrechnung.

Die Variationen der beiden Formen $\varepsilon^\varrho_\sigma$ und $'\varepsilon^\varrho_\sigma$ des gemischten Formänderungstensors fallen für $t = 0$ zusammen und seien mit $\delta^* \varepsilon^\varrho_\sigma$ bezeichnet. Aus den Gl. (1.7) bzw. (1.7a) berechnen sich die $\delta^* \varepsilon^\varrho_\sigma$ für die Kreiszylinderschale zu:

$$\left.\begin{array}{l} \delta^* \varepsilon^1_1 = \delta \dot v_1 + \delta v_3 - \frac{q_3}{a}(\delta \ddot v_3 + \delta v_3)\left(1 - \frac{q_3}{a}\right) \\ \delta^* \varepsilon^1_2 = \frac{1}{2a^2}\{a^2 \delta v_1' + \delta \dot v_2\} - \frac{q^2}{a}\left(\delta \dot v_3' + \frac{\delta \dot v_2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{3}{2}\,\frac{q_3}{a}\right) \\ \delta^* \varepsilon^2_1 = \frac{1}{2}\{a^2 \delta v_1' + \delta \dot v_2\} - a q_2 (\delta \dot v_3' - \delta v_1')\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{q_3}{a}\right) \\ \delta^* \varepsilon^2_2 = \delta v_2' - a q_3\, \delta v_3'' \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (7.6).$$

Benutzt man als elastische Konstante den Elastizitätsmodul E und den reziproken Wert der Querdehnungszahl $\nu = \frac{1}{m}$, und führt noch die Abkürzungen

$$D = \frac{E h}{1 - \nu^2}, \qquad k = \frac{h^2}{12 a^2}$$

ein, so erhält man für die Komponenten von Längskraft- und Momententensor nach der Konstruktion von Ziffer II die Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{l} \delta T^1_1 = D\{\delta \dot v_1 + \delta v_3 + \nu\, \delta v_2' - \nu k a^2 \delta v_3''\} \\ \delta T^1_2 = D(1-\nu)\left\{\frac{1}{2a^2}(a^2 \delta v_1' + \delta \dot v_2) + \frac{1}{2} k \left(\delta \dot v_3' + \frac{1}{a^2}\delta \dot v_2\right)\right\} \\ \delta T^2_1 = D(1-\nu)\left\{\frac{1}{2}(a^2 \delta v_1' + \delta \dot v_2) - \frac{3}{2} k a^2 (\delta \dot v_3' - \delta v_1')\right\} \\ \delta T^2_2 = D\{\delta v_2' + \nu(\delta \dot v_1 + \delta v_3) - k a^2 \delta v_3''\} \\ \hline \delta M^1_1 = D k a\{\delta \dot v_1 + \nu\, \delta v_2' - \delta \ddot v_3 - \nu a^2 \delta v_3''\} \\ \delta M^1_2 = D k a (1-\nu)\left\{\frac{1}{2a^2}(a^2 \delta v_1' - \delta \dot v_2) - \delta \dot v_3'\right\} \\ \delta M^2_1 = D k a (1-\nu)\left\{\frac{3}{2} a^2 \delta v_1' + \frac{1}{2}\delta \dot v_2 - a^2 \delta \dot v_3'\right\} \\ \delta M^2_2 = D k a\{\delta v_2' + \nu\, \delta \dot v_1 - a^2 \delta v_3'' - \nu\, \delta \ddot v_3\} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (7.7).$$

Die Stabilitätsgleichungen, die der Grundlösung (7.4) zugeordnet sind, lauten:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\,\delta T_1^{\mu}}{\partial q^{\mu}} - (a p - P)\,\delta \dot{v}_2' = 0 \\ &\frac{\partial\,\delta T_2^{\mu}}{\partial q^{\mu}} + (a p - P)(\delta \dot{v}_1' + \delta v_3') = 0 \\ &\frac{\partial^2\,\delta M^{\mu\lambda}}{\partial q^{\lambda}\partial q^{\mu}} - \frac{1}{a}\,\delta T_1^1 + \frac{1}{a^2}\,\delta M_1^1 - p(\delta \ddot{v}_3 + \delta v_3) - P a^2\,\delta v_3'' = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7.8).$$

Für die δT_{λ}^{μ}; $\delta M^{\mu\lambda} = g_{(0)}^{\mu\varrho}\,\delta M_{\varrho}^{\lambda}$ sind die Ausdrücke (7.7) einzusetzen. Man erhält drei partielle Differentialgleichungen, linear und homogen in δv_1, δv_2 und δv_3, die, wenn man noch die dimensionslosen Größen

$$\varrho_1 = \frac{a p}{D}; \quad \varrho_2 = \frac{P}{D}$$

einführt, folgende Gestalt annehmen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\ \delta \ddot{v}_1 + \frac{1-\nu}{2} a^2 (1+3k)\,\delta v_1'' + \left[\frac{1+\nu}{2} - (\varrho_1 - \varrho_2)\right] \delta \dot{v}_2' + \delta \dot{v}_3 - \frac{3-\nu}{2} k a^2\,\delta \dot{v}_3'' = 0 \\ &\text{b)}\ \left[\frac{1+\nu}{2} + (\varrho_1 - \varrho_2)\right] \delta \dot{v}_1' + \delta v_2'' + \frac{1-\nu}{2}(1+k)\frac{1}{a^2}\,\delta \ddot{v}_2 \\ &\qquad + (\nu + \varrho_1 - \varrho_2)\,\delta v_3' - k\left[a^2\,\delta v_3''' - \frac{1-\nu}{2}\,\delta \ddot{v}_3'\right] = 0 \\ &\text{c)}\ k\{\delta \dddot{v}_1 + (2-\nu) a^2\,\delta \dot{v}_1'' + \delta \dot{v}_1\} - \delta \dot{v}_1 + k\{a^2\,\delta v_2''' + \nu(\delta \ddot{v}_2' + \delta v_2')\} - \nu\,\delta \dot{v}_2 \\ &\qquad - k\{a^4\,\delta v_3'''' + 2a^2\,\delta \ddot{v}_3'' + \delta \ddddot{v}_3 + \delta \ddot{v}_3\} - \delta v_3 - \varrho_1(\delta \ddot{v}_3 + \delta v_3) - \varrho_2 a^2\,\delta v_3'' = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7.9).$$

Vergleicht man die Gl. (7.9) mit den entsprechenden Gleichungen in den Arbeiten von W. Flügge und K. v. Sanden-Tölke[12]), so zeigt sich völlige Übereinstimmung in den von k, ϱ_1 und ϱ_2 freien Gliedern, wie auch nicht anders zu erwarten ist. Die Abweichungen in den mit k multiplizierten Termen sind auf die z. T. anders lautenden Definitionen der Schnittgrößen zurückzuführen. Die ϱ_1 und ϱ_2 enthaltenden Anteile weichen in allen drei Systemen mehr oder weniger voneinander ab. Auf die Größe der Knicklasten haben diese Abweichungen jedoch, wie wir sehen werden, keinen nennenswerten Einfluß.

Da man in der technischen Literatur vielfach nicht scharf genug die ursprünglichen Differentialgleichungen von den Variationsgleichungen (Eulersche und Jacobische Differentialgleichungen im Sprachgebrauch der Variationsrechnung) unterscheidet, so stehen z. B. in den Differentialgleichungen, die K. v. Sanden und F. Tölke angeben, auf der rechten Seite noch die Belastungen der Schale, so daß die Gleichungen inhomogen sind, während in Wirklichkeit die Variationen der Belastungen einzusetzen sind, die, sofern sie nicht verschwinden, linear und homogen in den virtuellen Verschiebungen sind.

Es ist nun die Frage zu entscheiden, welche Randbedingungen den virtuellen Verschiebungen aufzuerlegen sind. Der einfachste Fall ist der, daß entsprechend den Randbedingungen für die Grundlösung (7.4) auch die virtuellen Verschiebungen am Rande nicht vorgeschrieben sind. Es ist aber auch möglich, die Schar der virtuellen Verrückungen durch geeignete Randbedingungen einzuschränken. Wählt man diese Randbedingungen so, wie sie gewählt werden müßten, wenn bereits für die Grundlösung bestimmte Randbedingungen vorgeschrieben sind, so werden die erhaltenen Knicklasten ungefähr denen entsprechen, die der wirklichen Grundlösung zugehören.

Die Differentialgleichungen (7.9) gestatten den Produktansatz:

$$\left.\begin{aligned} \delta v_1 &= A \sin n q_1 \cdot \sin \frac{\lambda}{a} q_2 \\ \delta v_2 &= B a \cos n q_1 \cdot \cos \frac{\lambda}{a} q_2 \\ \delta v_3 &= C \cos n q_1 \cdot \sin \frac{\lambda}{a} q_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7.10),$$

wobei n ganzzahlig sein muß, und der für $\lambda = m\dfrac{a\pi}{l}$ (m ganzzahlig) bereits für sich mechanisch sinnvolle Randbedingungen erfüllt. Führt man die Funktionen (7.10) in die Differential-

[12]) Vgl. [5], [6], [8].

gleichungen (7.9) ein, so erhält man drei lineare homogene Gleichungen für die Koeffizienten A, B und C

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\ -\left\{n^2+\frac{1-\nu}{2}(1+3k)\lambda^2\right\}a+\left\{\frac{1+\nu}{2}-(\varrho_1-\varrho_2)\right\}n\lambda\cdot B-\left\{1+\frac{3-\nu}{2}k\lambda^2\right\}n\,C=0 \\ &\text{b)}\ \left\{\frac{1+\nu}{2}+(\varrho_1-\varrho_2)\right\}n\lambda\cdot A-\left\{\lambda^2+\frac{1-\nu}{2}(1+k)n^2\right\}B \\ &\qquad+\left\{(\nu+\varrho_1-\varrho_2)+k\left(\lambda^2-\frac{1-\nu}{2}n^2\right)\right\}\lambda\,C=0 \\ &\text{c)}\ -\{1+[(n^2-1)+(2-\nu)\lambda^2]k\}\,n\,A+\{\nu+k[\lambda^2+\nu(n^2-1)]\}\,\lambda\cdot B \\ &\qquad-\{1+k[(n^2+\lambda^2)^2-n^2]-\varrho_1(n^2-1)-\varrho_2\lambda^2\}\,C=0 \end{aligned}\right\} \quad (7.11).$$

Die drei Gl. (7.11) haben nur dann eine von Null verschiedene Lösung, wenn die Determinante des Systems verschwindet, was einer Bedingungsgleichung zwischen den Lastparametern ϱ_1 und ϱ_2 gleichkommt. Bei der Berechnung der Determinante können Glieder, die von höherer Ordnung klein werden, insbesondere höhere Potenzen von ϱ_1, ϱ_2, k und ihre Produkte, vernachlässigt werden. Man erhält so:

$$\left.\begin{aligned} &\varrho_1\{(n^2-1)(n^2+\lambda^2)^2+\nu\lambda^4-\lambda^2n^2\}+\varrho_2\{\lambda^2(n^2+\lambda^2)^2-\nu\lambda^4+\lambda^2n^2\} \\ &\quad=(1-\nu^2)\lambda^4+k\{(n^2+\lambda^2)^4-2[\nu\lambda^6+3\lambda^4n^2+(4-\nu)\lambda^2n^4+n^6] \\ &\quad+2(2-\nu)\lambda^2n^2+2(1-\nu^2)\lambda^4+n^4\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7.12).$$

In der vorstehenden Gleichung sind offenbar die Glieder $2k(1-\nu^2)\lambda^4$, $\varrho_1\nu\lambda^4$ und $\varrho_2\nu\lambda^4$ gegenüber $(1-\nu^2)\lambda^4$ bedeutungslos. Vernachlässigt man sie, so stimmt die Gl. (7.12) völlig mit der von W. Flügge angegebenen überein. Da die Knickgleichung dort auch eingehend diskutiert worden ist, erübrigt es sich, weiter darauf einzugehen. Dem Wert $\lambda=0$ entspricht eine ausgezeichnete benachbarte Gleichgewichtslage. Sie ist allein in Wirklichkeit diejenige, die der Grundlösung (7.4) zugeordnet ist. Die Knickgleichung reduziert sich für $\lambda=0$ auf:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1 n^4(n^2-1)&=k\,n^4(n^2-1)^2 \\ \varrho_1&=k(n^2-1) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7.12\,\text{a}).$$

Die kleinste Knicklast gehört zu dem Wert $n=2$ mit $\varrho_1=3k$. Mechanisch ist dieser Fall dadurch ausgezeichnet, daß für ihn die Variation des Maßtensors der Mittelfläche verschwindet, d. h. der Übergang in die benachbarte Gleichgewichtslage ist mit keiner Dehnung der Mittelfläche verbunden. Der kritische Außendruck nähert sich asymptotisch dem Wert $\varrho_1=3k$, wenn zwar die Böden des Zylinders versteift sind, die Länge des Zylinders aber sehr groß ist. Man spricht deshalb im Falle $\lambda=0$ auch von der Knicklast des unendlich langen Zylinders.

Wir wollen nun dasselbe Problem mit Hilfe des Ansatzes (4.1) der Formänderungsarbeit behandeln. In den beiden gemischten Formen $'\varepsilon_\sigma^\varrho$ und $\varepsilon_\sigma^\varrho$ des Verzerrungstensors kann man sich bei den q_3 enthaltenden Termen auf Anteile beschränken, die in den Verschiebungen linear sind. Nur die Verzerrung der Mittelfläche ist bis zu den quadratischen Gliedern zu berechnen, entsprechend der Tatsache, daß die Grundlösung praktisch biegungsfrei ist.

Wir betrachten diesen Teil der $'\varepsilon_\sigma^\varrho$ und $\varepsilon_\sigma^\varrho$ und den Beitrag, den er zur Formänderungsarbeit liefert, zunächst für sich. Die Formänderungsgrößen der Mittelfläche sind:

$$j_{\varrho\sigma}=(\varepsilon_{\varrho\sigma})_{q_3=0}=\frac{1}{2}\left(g_{\varrho\sigma}-g^{(0)}_{\varrho\sigma}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7.13).$$

Die neuen Komponenten des Maßtensors der Mittelfläche lassen sich, ausgedrückt durch die $j_{\varrho\sigma}$, somit schreiben:

$$g_{\varrho\sigma}=g^{(0)}_{\varrho\sigma}+2j_{\varrho\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7.13\,\text{a}).$$

Für die kontravarianten Komponenten $g^{\lambda\varrho}$ gilt die Identität

$$\left.\begin{aligned} g^{\lambda\varrho}&=g^{\lambda\varrho}_{(0)}-2g^{\varrho\tau}g^{\lambda\mu}_{(0)}j_{\tau\mu} \\ &=g^{\lambda\varrho}_{(0)}-2g^{\varrho\tau}\,'j^{\lambda}_{\tau} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7.14),$$

die man als Iterationsformel für ihre Berechnung benutzen kann. Um in den Formänderungskomponenten j^σ_ϱ alle Glieder zu erfassen, die in den Verschiebungen quadratisch sind, genügt bereits die erste Iteration, d. h. man kann setzen:

$$g^{\lambda\varrho}=g^{\lambda\varrho}_{(0)}-2g^{\varrho\tau}_{(0)}\,'j^{\lambda}_{\tau} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7.14\,\text{a}).$$

Man gewinnt damit für die zweite gemischte Form des Verzerrungstensors die Darstellung:

$$j^{\sigma}_{\varrho} = g^{\sigma\mu} j_{\mu\varrho} = {}'j^{\sigma}_{\varrho} - 2\,{}'j^{\tau}_{\varrho}\,{}'j^{\sigma}_{\tau} \quad \text{(7.15)}.$$

In die Formänderungsarbeit gehen die Ausdrücke ${}'j^{\varrho}_{\sigma} j^{\sigma}_{\varrho}$ und ${}'e\,e$ ein, die sich berechnen zu:

$$\left.\begin{aligned} {}'j^{\varrho}_{\sigma} j^{\sigma}_{\varrho} &= {}'j^{\varrho}_{\sigma}\,{}'j^{\sigma}_{\varrho} - 2\,{}'j^{\varrho}_{\sigma}\,{}'j^{\tau}_{\varrho}\,{}'j^{\sigma}_{\tau} \\ {}'e\,e &= {}'e^2 - 2\,{}'e\,{}'j^{\tau}_{\varrho}\,{}'j^{\varrho}_{\tau} \end{aligned}\right\} \quad \text{(7.16)}.$$

Wir spezialisieren nun die vorstehenden Formeln auf den Kreiszylinder. Die ${}'j^{\varrho}_{\sigma}$ erhalten die Werte:

$$\left.\begin{aligned} {}'j^1_1 &= \dot{v}_1 + v_3 + \frac{1}{2}\left(\dot{v}_1^2 + v_3^2 + 4\,\dot{v}_1 v_3 + \frac{\dot{v}_2^2}{a^2} + \dot{v}_3^2\right) \\ {}'j^1_2 &= \frac{1}{2a^2}\{a^2 \acute{v}_1 + \dot{v}_2 + (a^2 \dot{v}_1 \acute{v}_1 + \dot{v}_2 \acute{v}_2 + 2a^2 \acute{v}_1 v_3 + a^2 \dot{v}_3 \acute{v}_3)\} \\ {}'j^2_1 &= a^2\,{}'j^1_2 \\ {}'j^2_2 &= \acute{v}_2 + \frac{1}{2}(\acute{v}_2^2 + a^2 \acute{v}_1^2 + a^2 \acute{v}_3^2) \end{aligned}\right\} \quad \text{(7.17)}.$$

Bei den Formänderungskomponenten haben wir uns mit den quadratischen Termen begnügt und beschränken uns deshalb in dem Ausdruck für die Formänderungsarbeit auf Glieder dritter Ordnung. Wir setzen also:

$$\begin{aligned} {}'j^1_1 j^1_1 &= (\dot{v}_1 + v_3)^2 + (\dot{v}_1 + v_3)\left[\dot{v}_1^2 + v_3^2 + 4\,\dot{v}_1 v_3 + \frac{\dot{v}_2^2}{a^2} + \dot{v}_3^2\right] \\ &\quad - 2(\dot{v}_1 + v_3)^3 - \frac{1}{2a^2}(\dot{v}_1 + v_3)(a^2 \acute{v}_1 + \dot{v}_2)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}'j^1_2 j^2_1 &= \frac{1}{4a^2}(a^2 \acute{v}_1 + \dot{v}_2)^2 + \frac{1}{2a^2}(a^2 \acute{v}_1 + \dot{v}_2)[a^2 \dot{v}_1 \acute{v}_1 + \dot{v}_2 \acute{v}_2 + 2a^2 \acute{v}_1 v_3 + a^2 \dot{v}_3 \acute{v}_3] \\ &\quad - \frac{1}{2a^2}(\dot{v}_1 + \acute{v}_2 + v_3)(a^2 \acute{v}_1 + \dot{v}_2)^2, \end{aligned}$$

$${}'j^2_2 j^2_2 = \acute{v}_2^2 + \acute{v}_2[\acute{v}_2^2 + a^2 \acute{v}_1^2 + a^2 \acute{v}_3^2] - 2\acute{v}_2^3 - \frac{1}{2a^2}\acute{v}_2(a^2 \acute{v}_1 + \dot{v}_2)^2,$$

$$\begin{aligned} {}'e\,e &= (\dot{v}_1 + \acute{v}_2 + v_3)^2 + (\dot{v}_1 + \acute{v}_2 + v_3)\left[\dot{v}_1^2 + \acute{v}_2^2 + v_3^2 + a^2 \acute{v}_1^2 + \frac{1}{a^2}\dot{v}_2^2 + 4\,\dot{v}_1 v_3 + \dot{v}_3^2 + a^2 \acute{v}_3^2\right] \\ &\quad - 2(\dot{v}_1 + \acute{v}_2 + v_3)\left[(\dot{v}_1 + v_3)^2 + \frac{1}{2a^2}(a^2 \acute{v}_1 + \dot{v}_2)^2 + \acute{v}_2^2\right]. \end{aligned}$$

Nach geeigneter Zusammenfassung und unter Aufnahme der Krümmungsänderungen erhält man für die Formänderungsarbeit des Kreiszylinders folgenden Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} A = G h \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{l} \Big\{ & (\dot{v}_1 + v_3)^2 + \frac{1}{2a^2}(a^2 \acute{v}_1 + \dot{v}_2)^2 + \acute{v}_2^2 \\ & + \frac{1}{m-1}(\dot{v}_1 + \acute{v}_2 + v_3)^2 + k\Big[(\ddot{v}_3 + v_3)^2 + 2a^2(\dot{\acute{v}}_3 - \acute{v}_1)\left(\dot{\acute{v}}_3 + \frac{1}{a^2}\dot{v}_2\right) \\ & - \frac{1}{2}(a^2 \acute{v}_1 + \dot{v}_2)\left(2\dot{\acute{v}}_3 - \frac{1}{a^2}\dot{v}_2 - 3\acute{v}_1\right) + a^2(a^2 \acute{\acute{v}}_3^2 - 2\acute{\acute{v}}_3 \dot{v}_2) \\ & + \frac{1}{m-1}\left((\ddot{v}_3 + v_3 + a^2 \acute{\acute{v}}_3)^2 - 2(\dot{v}_1 + \acute{v}_2 + v_3)\,a^2 \acute{\acute{v}}_3\right)\Big] \\ & - (\dot{v}_1 + v_3)\left[\dot{v}_1^2 + v_3^2 + \frac{3}{2}\acute{v}_1 \dot{v}_2 + \frac{1}{2}\frac{\dot{v}_2^2}{a^2} - \dot{v}_3^2\right] \\ & - \frac{1}{2a^2}(a^2 \acute{v}_1 + \dot{v}_2)[a^2 \dot{v}_1 v_1 + \dot{v}_2 \acute{v}_2 - a^2 \acute{v}_1 v_3 - 2a^2 \dot{v}_3 \acute{v}_3] \\ & - \acute{v}_2\left[\acute{v}_2^2 + \frac{3}{2}\acute{v}_1 \dot{v}_2 + \frac{1}{2}a^2 \acute{v}_1^2 - a^2 \acute{v}_3^2\right] \\ & - \frac{1}{m-1}(\dot{v}_1 + v_2 + v_3)[\dot{v}_1^2 + \acute{v}_2^2 + v_3^2 + 2\acute{v}_1 \dot{v}_2 - \dot{v}_3^2 - a^2 \acute{v}_3^2]\Big\}\, a\,\mathrm{d}q_1\,\mathrm{d}q_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{(7.18)}.$$

Wir nehmen an, der konstante Außendruck habe stets die Richtung der Flächennormalen, dann sind seine kovarianten Komponenten gegeben durch:

$$p_i = -p\,\zeta_i \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (7.19).$$

Er leistet bei einer virtuellen Verrückung δx^i die Arbeit:

$$\delta A_p = \int_0^{2\pi}\int_0^l p_i\,\delta x^i \sqrt{g}\,\mathrm{d}q_1\,\mathrm{d}q_2 = -p\int_0^{2\pi}\int_0^l \zeta_i\,\delta x^i\sqrt{g}\,\mathrm{d}q_1\,\mathrm{d}q_2 \qquad (7.20).$$

Die kovarianten Komponenten der Flächennormale ζ_i sind nach den Gl. (6.9) zu berechnen. Für den Kreiszylinder nehmen sie in den hier benutzten Koordinaten die mit $\sqrt{g}$ multiplizierten Werte:

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{g}\,\zeta_1 &= a^2(1+v_3)\left[\dot v_2\,\acute v_3 - \dot v_3(1+\acute v_2)\right]\\
\sqrt{g}\,\zeta_2 &= a^2(1+v_3)\left[\acute v_1\,\dot v_3 - \acute v_3(1+\dot v_1)\right]\\
\sqrt{g}\,\zeta_3 &= a^2(1+v_3)\left[(1+\dot v_1)(1+\acute v_2) - \acute v_1\,\dot v_2\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (7.21)$$

an. Setzt man diese Werte in (7.20) ein, so erhält man den Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned}
\delta A_p = -a\,p\int_0^{2\pi}\int_0^l (1+v_3)\,&[\{\dot v_2\,\acute v_3 - \dot v_3(1+\acute v_2)\}\,\delta v_1\\
&+\{\acute v_1\,\dot v_3 - \acute v_3(1+\dot v_1)\}\,\delta v_2 + \{(1+\dot v_1)(1+\acute v_2) - \acute v_1\,\dot v_2\}\,\delta v_3]\,a\,\mathrm{d}q_1\,\mathrm{d}q_2
\end{aligned}\right\} \qquad (7.22).$$

Er läßt sich als die erste Variation des Integrals:

$$A_p = -\frac{a\,p}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^l (1+v_3)^2\{(1+\dot v_1)(1+\acute v_2) - \acute v_1\,\dot v_2\}\,a\,\mathrm{d}q_1\,\mathrm{d}q_2 \qquad (7.22)$$

ansprechen, da bei der bekannten Umformung der ersten Variation die Randglieder verschwinden. Dem Außendruck läßt sich also ein Potential $U_p = -A_p$ zuordnen.

Der Grundlösung (7.4) entsprechen, unter Vernachlässigung höherer Potenzen von $\frac{P}{D}$ und $\frac{a\,p}{D}$, die Verschiebungen:

$$\left.\begin{aligned}
v_3^{(0)} &= -\frac{a\,p - \nu P}{D(1-\nu^2)}; & \acute v_2^{(0)} &= -\frac{P - \nu\,a\,p}{D(1-\nu^2)}\\
&= -\frac{\varrho_1 - \nu\,\varrho_2}{1-\nu^2}; & &= -\frac{\varrho_2 - \nu\,\varrho_1}{1-\nu^2}
\end{aligned}\right\} \qquad (7.4\,\mathrm{a}).$$

$v_2^{(0)}$ und $\acute v_2^{(0)}$ sind bis auf unbedeutende Glieder höherer Ordnung Lösungen der Eulerschen Gleichungen, die dem Variationsproblem

$$A + U_p = \mathrm{Min.} \qquad (7.23)$$

zugeordnet sind.

Berechnet man nun die zweite Variation der potentiellen Energie $U = A + U_p$ für die Grundlösung (7.4a) und bezeichnet die Variationen von v_1, v_2, v_3 mit u, v, w, so erhält man den Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned}
\delta^2 u = G\,h\int_0^{2\pi}\int_0^l \Big\{&(\dot u + w)^2 + \frac{1}{2a^2}(a^2\acute u + \dot v)^2 + \acute v^2 + \frac{1}{m-1}(\dot u + \acute v + w)^2\\
&+ k\Big[(\ddot w + w)^2 + 2a^2(\dot{\acute w} - \acute u)\Big(\dot{\acute w} + \frac{1}{a^2}\dot v\Big) - \frac{1}{2}(a^2\acute u + \dot v)\Big(2\dot{\acute w} - \frac{\dot v_2}{a^2} - 3\acute u\Big)\\
&+ a^2(a^2\acute{\acute w}^2 - 2\dot{\acute w}\,\acute v) + \frac{1}{m-1}\big((\ddot w + w + a^2\acute{\acute w})^2 - 2(\acute u + \acute v + w)\,a^2\acute{\acute w}\big)\Big]\\
&- \acute v_3^{(0)}\Big[\dot u^2 + 2\dot u\,w + 3w^2 + \frac{3}{2}\acute u\,\dot v + \frac{1}{2a^2}\dot v^2 - \dot w^2 - \frac{1}{2}(a^2\acute u + \dot v)\,\acute u\\
&+ \frac{1}{m-1}(\dot u^2 + 2\dot u\,w + 3w^2 + 2\acute v\,w + \acute v^2 + 2\acute u\,\dot v - \dot w^2 - a^2\acute w^2)\Big]\\
&- \acute v_2^{(0)}\Big[3\acute v^2 + \frac{3}{2}\acute u\,\dot v + \frac{1}{2}a^2\acute u^2 - a^2\acute w^2 + \frac{1}{2a^2}(a^2\acute u + \dot v)\,\dot v\\
&+ \frac{1}{m-1}(\dot u^2 + 3\acute v^2 + w^2 + 2\acute u\,\dot v - \dot w^2 - a^2\acute w^2 + 2(\dot u + w)\,\acute v)\Big]\Big\}\,a\,\mathrm{d}q_1\,\mathrm{d}q_2\\
+\frac{a\,p}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^l \{&w^2 + 2(\dot u + \acute v)\,w + \dot u\,\acute v - \acute u\,\dot v\}\,a\,\mathrm{d}q_1\,\mathrm{d}q_2
\end{aligned}\right\} \qquad (7.24).$$

Die Jacobischen Differentialgleichungen, die sich der zweiten Variation zuordnen lassen, erhalten hier die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \ddot{u} + \frac{1-\nu}{2}(1+3k)\,a^2 u'' + \frac{1+\nu}{2}\dot{v}' + \dot{w} - \frac{3-\nu}{2}k\,a^2 \dot{w}''\\
&\qquad + \varrho_1 \ddot{u} - \frac{1}{2}(\varrho_1-\varrho_2)\,a^2 u'' + \frac{(1-2\nu)\varrho_1+(2-\nu)\varrho_2}{2(1-\nu)}\dot{v}' + \left(\frac{\varrho_1-\nu\varrho_2}{1-\nu^2}+\varrho_1\right)\dot{w} = 0\\
&\text{b)}\quad \frac{1+\nu}{2}\dot{u}' + v'' + \frac{1-\nu}{2}(1+k)\frac{\ddot{v}}{a^2} + \nu w' - k\left(a^2 w''' - \frac{1-\nu}{2}\ddot{w}'\right)\\
&\qquad + \frac{(1-2\nu)\varrho_1+(2-\nu)\varrho_2}{2(1-\nu)}\dot{u}' + \frac{(3-\nu^2)\varrho_2-2\nu\varrho_1}{1-\nu^2}v''\\
&\qquad + \frac{1}{2}\frac{1-\nu}{1+\nu}(\varrho_1+\varrho_2)\frac{\ddot{v}}{a^2} + \left(\frac{\nu(\varrho_1+\varrho_2)}{1+\nu}+\varrho_1\right)w' = 0\\
&\text{c)}\quad \dot{u} - \frac{3-\nu}{2}k\,a^2 \dot{u}'' + \nu v' - k\left(a^2 v''' - \frac{1-\nu}{2}\ddot{v}'\right) + w + k\,(\ddddot{w} + 2\ddot{w} + 2a^2 \ddot{w}'' + a^4 w'''' + w)\\
&\qquad + \left(\frac{\varrho_1-\nu\varrho_2}{1-\nu^2}+\varrho_1\right)\dot{u} + \left(\frac{\nu(\varrho_1+\varrho^2)}{1+\nu}+\varrho_1\right)v' + \varrho_1(\ddot{w}+w)\\
&\qquad + \varrho^2 a^2 w'' + \frac{(3-\nu^2)\varrho_1-2\nu\varrho_2}{1-\nu^2}w = 0
\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; (7.25).$$

In den Gl. (7.25) fällt zunächst auf, daß die dritte Gleichung auch in den von ϱ_1 und ϱ_2 freien Gliedern von der Gl. (7.9c) abweicht. Das hat folgenden Grund: Bei der Einführung der Spannungsresultanten haben wir uns mit den Resultierenden zweiter Ordnung, d. h. mit den Momenten, begnügt.

Da im Formänderungstensor und bei der Durchführung der Integrationen über die Schalenstärke die zweiten Potenzen von q_3 vollständig berücksichtigt worden sind, so hätte man, um diese Glieder von den Spannungsresultanten aus sämtlich zu erfassen, auch noch die Resultierenden dritter Ordnung einzuführen. Ihr Einfluß ist jedoch praktisch ohne Bedeutung, und es lohnt sich nicht, sie in die Gleichgewichtsbedingungen aufzunehmen. Beim Ansatz der Formänderungsarbeit werden alle in q_3 quadratischen Glieder erfaßt, die Gl. (7.25) zeigen daher in den entsprechenden Termen eine größere Symmetrie als die Gl. (7.9).

Diese Unterschiede, wie auch die erwarteten Unterschiede in den Knickgliedern machen sich jedoch bei der Berechnung der Knickdeterminante nicht geltend. Innerhalb der Glieder, die in die Gl. (7.12) aufgenommen wurden, zeigt sich kein Unterschied.

Wir wollen nun noch kurz auf die Frage eingehen, wann ein zylindrisches Rohr unter reiner Torsionsbeanspruchung ausknickt, weil es sich zeigt, daß eine spezielle Lösung dieser Aufgabe, die in der Literatur gelegentlich als Greenhill-Fall bezeichnet wird, nicht existiert.

Die Grundlösung für den tordierten Kreiszylinder lautet:

$$\frac{a\,\overset{(0)}{T}{}_2^1}{D} = \frac{\overset{(0)}{T}{}_1^2}{D\,a} = \text{const} = \varrho \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7.26).$$

Die Momente $\overset{(0)}{M}{}_2^1$ und $\overset{(0)}{M}{}_1^2$ sind unbedeutend und können vernachlässigt werden. Die Stabilitätsgleichungen stellen wir im Anschluß an die Überlegungen in Ziffer V auf. Sie lauten für die Grundlösung (7.26):

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \delta\ddot{v}_1 + \frac{1-\nu}{2}a^2(1+3k)\,\delta v_1'' + \frac{1+\nu}{2}\delta\dot{v}_2' + \delta\dot{v}_3 - \frac{3-\nu}{2}k\,a^2\,\delta\dot{v}_3''\\
&\qquad + \varrho\left\{a\,\delta v_2'' + a\,\delta\dot{v}_3' - \frac{1}{a}\delta\ddot{v}_2\right\} = 0\\
&\text{b)}\quad \frac{1+\nu}{2}\delta\dot{v}_1' + \delta v_2'' + \frac{1-\nu}{2}(1+k)\frac{1}{a^2}\delta\ddot{v}_2 + \nu\,\delta v_3'\\
&\qquad - k\left\{a^2\,\delta v_3''' - \frac{1-\nu}{2}\delta\ddot{v}_3'\right\} + \varrho\left\{\frac{1}{a}\delta\ddot{v}_1 + \frac{1}{a}\delta\dot{v}_3 - a\,\delta v_1''\right\} = 0\\
&\text{c)}\quad k\,\{\delta\dddot{v}_1 + (2-\nu)\,a^2\,\delta\dot{v}_1'' + \delta\dot{v}_1\} - \delta\dot{v}_1 + k\,\{a^2\,\delta v_2''' + \nu(\delta\ddot{v}_2' + \delta v_2')\}\\
&\qquad - \nu\,\delta v_2' - k\,\{a^4\,\delta v_3'''' + 2a^2\,\delta\ddot{v}_3'' + \delta\ddddot{v}_3 + \delta\ddot{v}_3\} - \delta v_3\\
&\qquad + \varrho\left\{2a\,\delta\dot{v}_3' + \left(\frac{1}{a}\delta\dot{v}_2 - a\,\delta v_1'\right)\right\} = 0
\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \; . \; (7.27).$$

Während bei der vorigen Aufgabe die Grundlösung nicht die Randbedingungen eines Zylinders mit ausgesteiften Böden erfüllte, es aber gelang, eine einfache Lösung der Stabilitätsgleichungen mit geeigneten Randbedingungen für die virtuellen Verschiebungen anzugeben, liegt beim Torsionsproblem die Sache gerade umgekehrt. Es bleibt nämlich ohne Einfluß auf die Grundlösung (7.26), ob an den Rändern die Schubkräfte vorgeschrieben sind, oder ob man einen Rand festhält und die Verdrehung des anderen Randes vorgibt. Dagegen macht es sehr große Schwierigkeiten, eine Lösung der Stabilitätsgleichungen (7.27) zu konstruieren, bei der die virtuellen Verschiebungen die Randbedingungen erfüllen, die sich etwa ergeben, wenn bei der Grundlösung die Verdrehung eines Randes vorgeschrieben ist. Die Differentialgleichungen (7.27) gestatten nämlich nicht mehr den Produktansatz (7.10), sondern nur noch den allgemeineren Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} \delta v_1 &= A \sin\left(n q_1 - \frac{\lambda}{a} q_2\right) \\ \delta v_2 &= B\, a \sin\left(n q_1 - \frac{\lambda}{a} q_2\right) \\ \delta v_3 &= C \cdot \cos\left(n q_1 - \frac{\lambda}{a} q_2\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (7.28).$$

Geht man mit diesem Ansatz in die Differentialgleichungen hinein, so erhält man für die Koeffizienten A, B und C die drei linearen homogenen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)} \; -\left\{n^2 + \frac{1-\nu}{2}(1+3k)\lambda^2\right\} A + \left\{\frac{1+\nu}{2} n\lambda + \varrho(n^2-\lambda^2)\right\} B \\ &\qquad -\left\{n + \frac{3-\nu}{2} k n \lambda^2 - \varrho\lambda\right\} C = 0 \\ &\text{b)} \; \left\{\frac{1+\nu}{2} n\lambda - \varrho(n^2-\lambda^2)\right\} A - \left\{\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2}(1+k) n^2\right\} B \\ &\qquad + \left\{\nu\lambda + k\left(\lambda^2 - \frac{1-\nu}{2} n^2\right)\lambda - \varrho n\right\} C = 0 \\ &\text{c)} \; -\{(1 + k[(n^2-1) + (2-\nu)\lambda^2])\, n - \lambda\varrho\}\, A \\ &\qquad + \{(\nu + k[\lambda^2 + \nu(n^2-1)])\,\lambda + n\varrho\}\, B \\ &\qquad - \{1 + k[(n^2+\lambda^2)^2 - n^2] - 2\lambda n \varrho\}\, C = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7.29).$$

Setzt man wieder die Determinante des Systems gleich Null, so ergibt sich mit den gleichen Vernachlässigungen wie vorher die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &2\lambda n \{(\lambda^2+n^2)(\lambda^2+n^2-1) - (1+\nu)\lambda^2\}\varrho \\ &\quad = (1-\nu^2)\lambda^4 + k\{(\lambda^2+n^2)^4 - 2[\nu\lambda^6 + 3\lambda^4 n^2 + (4-\nu)\lambda^2 n^4 + n^6] + 2(2-\nu)\lambda^2 n^2 + n^4\} \end{aligned}\right\} \quad (7.30),$$

wobei die rechte Seite mit der rechten Seite der Gl. (7.12) übereinstimmt. Die Gl. (7.30) ist bei gegebenem n als eine Gleichung achten Grades für λ anzusehen, deren Wurzeln acht Teillösungen von der Form (7.28) bestimmen, aus denen dann die Lösung für bestimmte Randbedingungen aufzubauen ist. Diese Rechnungen sind nur numerisch durchzuführen und wegen ihres Umfanges bisher noch nicht in Angriff genommen. Nur wenn keine Randbedingungen für die Verschiebungen vorgeschrieben sind, oder diese, ähnlich wie bei der vorigen Aufgabe im Falle des reinen Manteldrucks, für einen sehr langen Zylinder außer acht gelassen werden können, stellt die Gl. (7.30) bereits eine Bestimmungsgleichung für den Lastparameter ϱ dar, in der λ und n so zu wählen sind, daß ϱ möglichst klein wird, wobei n ganzzahlig sein muß, λ aber kontinuierlich veränderlich ist. Wir beschränken uns auf diesen Fall und betrachten zunächst den oben erwähnten Sonderfall, der zu dem Wert $n=1$ gehört.

Der Koeffizient von ϱ in (7.30) unterscheidet sich von dem von W. Flügge ausgegebenen Wert durch das Glied $(1+\nu)\lambda^2$. Für größere Werte von n hat die Abweichung keine Bedeutung, für $n=1$ ist sie aber wesentlich. Setzt man nämlich $n=1$, so erhalten wir:

$$\varrho = \frac{(1-\nu^2)\lambda + k\{\lambda^5 + 2(2-\nu)\lambda^3\}}{2(\lambda^2-\nu)} \quad \ldots \ldots \quad (7.31)$$

gegenüber:

$$\bar{\varrho} = \frac{(1-\nu^2)\lambda + k\{\lambda^5 + 2(2-\nu)\lambda^3\}}{2(\lambda^2+1)} \quad \text{(Flügge)} \quad \ldots \ldots \quad (7.31\,\text{a}).$$

Die weiteren Schlüsse, die an Hand der Gl. (7.31a) von W. Flügge und in ähnlicher Weise auch in der Arbeit von K. v. Sanden-F. Tölke gezogen werden, sind folgende[13]):

[13]) Vgl. [6], [8].

Die rechte Seite der Gl. (7.31a) erhält offenbar einen kleinen Wert, wenn λ klein ist. Dann können höhere Potenzen von λ vernachlässigt werden, und man erhält einfach:

$$\bar{\varrho}=\frac{1}{2}(1-\nu^2)\,\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7.31\,\mathrm{b}).$$

Der kleinste Wert, den λ annehmen kann, wenn die Lösung periodisch mit der Periode l ($l=$ Zylinderlänge) sein soll, ist $\lambda=\frac{2\pi a}{l}$ und damit:

$$\bar{\varrho}=\frac{\pi a}{l}(1-\nu^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7.32).$$

Das kritische Torsionsmoment $M=2\pi a^2 D\,\varrho=2\pi\,\frac{E\pi a^3 h}{l}$ hat dann die gleiche Größe, wie das kritische Torsionsmoment eines geraden Stabes mit der Steifigkeit $E\pi a^3 h$.

Bei der Gl. (7.31) ist dagegen die obige Schlußweise nicht möglich, es wäre also aus ihr zu schließen, daß die Greenhill-Lösung nicht existiert. Bevor wir auf diese Frage näher eingehen, wollen wir feststellen, wie man bei $n>1$ vorgeht. Hier verläuft die Behandlung der Gl. (7.30) entsprechend der vorher gemachten Bemerkung, daß nämlich die Werte von n und λ aufzusuchen sind, für die ϱ ein Minimum wird, wobei für n die nächstliegende ganze Zahl zu nehmen ist. Dann zeigt sich, daß nur $n=2$ in Frage kommt. Setzt man $n=2$ in (7.30) ein, so erhält man:

$$\varrho=\frac{(1-\nu^2)\,\lambda^4+k\,\{\lambda^8+2\,(8-\nu)\,\lambda^6+72\,\lambda^4+24\,(6+\nu)\,\lambda^2+144\}}{4\,\lambda\,\{\lambda^4+(6-\nu)\,\lambda^2+12\}} \quad \ldots\ldots \quad (7.33).$$

Von den beiden in Frage kommenden Wertbereichen liefert der Bereich $\lambda\ll 1$ einen weitaus kleineren Wert von ϱ als der Bereich $\lambda\gg 1$. Für $\lambda\ll 1$ können die höheren Potenzen von λ vernachlässigt werden, so daß man erhält:

$$\varrho=\frac{1-\nu^2}{48}\lambda^3+\frac{3k}{\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7.33\,\mathrm{a}).$$

Die erwähnte Abweichung spielt keine Rolle. Aus

$$\frac{\partial\varrho}{\partial\lambda}=\frac{1-\nu^2}{16}\lambda^2-\frac{3k}{\lambda^2}=0 \quad \text{folgt:} \quad \lambda_1=2\sqrt[4]{\frac{3k}{1-\lambda^2}}$$

und die zugehörige Knicklast ist demnach gegeben durch:

$$\varrho=2\sqrt[4]{\frac{1-\nu^2}{3}}\,k^{\frac{3}{4}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7.34).$$

Sie ist unabhängig von der Zylinderlänge, was auch der Fragestellung entspricht. Der Parameter ϱ hat dagegen für $n=1$ als Funktion von λ kein Minimum an der Stelle $\lambda=0$, sondern nur eine einfache Nullstelle.

Die abgeleiteten Formeln werden in einer weiteren Arbeit zur Behandlung der Stabilität der Kugelschale unter gleichförmigem Außendruck verwandt werden.

Schrifttumverzeichnis.

[1] C. B. Biezeno und H. Hencky: On the general theory of elastic stability. Proceedings of the Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Bd. 31, Nr. 6 und Bd. 32, Nr. 4.
[2] E. A. Deuker: Die Grundgleichungen der klassischen Elastizitätstheorie in allgemeinen Koordinaten. Deutsche Mathematik, Jahrg. 5, Heft 2, S. 94.
[3] E. A. Deuker: Beitrag zur Theorie endlicher Verformungen und zur Stabilitätstheorie des elastischen Körpers. Deutsche Mathematik, Jahrg. 5, Heft 6, S. 546.
[4] A. Duschek-W. Mayer: Lehrbuch der Differentialgeometrie I und II Leipzig und Berlin 1930.
[5] W. Flügge: Die Stabilität der Kreiszylinderschale. Ing.-Archiv, Bd. III 1932.
[6] W. Flügge: Statik und Dynamik der Schalen. Berlin 1934.
[7] A. van der Neut: De elastische stabiliteit van den dunwandigen bol. Diss. Delft 1932.
[8] K. v. Sanden und F. Tölke: Über Stabilitätsprobleme dünner kreiszylindrischer Schalen. Ing.-Archiv, Bd. III 1932, S. 24.
[9] E. Schwerin: Zur Stabilität der dünnwandigen Hohlkugel unter gleichmäßigen Außendruck. Z. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 2 (1922), S. 235.
[10] E. Trefftz: Über die Ableitung der Stabilitätskriterien des elastischen Gleichgewichts aus der Theorie endlicher Deformationen. Intern. Kongress f. Technische Mechanik, Stockholm 1930.
[11] R. Zoelly: Über ein Knickungsproblem an der Kugelschale. Diss. Zürich 1915.

Zusammenfassender Bericht.

Die konfluente hypergeometrische Funktion mit besonderer Berücksichtigung ihrer Bedeutung für die Integration der Wellengleichung in den Koordinaten eines Rotationsparaboloides *)

Von *Herbert Buchholz* in Berlin.

(Mitteilung aus dem Zentrallaboratorium für Fernmeldetechnik der AEG.)

5. Die Entwicklungen im Sonderfall $M_{i\tau, p/2}(i\zeta)$.

Bei manchen Untersuchungen kommt es darauf an, das allgemeine und auch das numerische Verhalten der Funktion $M_{\nu, p/2}(z)$ zu kennen, wenn ν und z rein imaginär sind, während der Parameter p gleich null oder gleich einer positiven ganzen Zahl ist. Um zu dieser Kenntnis zu gelangen, gehen wir von der Integraldarstellung (3.3a) aus. Führt man darin für ν und z die Größen $i\tau$ und $i\zeta$ ein und setzt überdies im Integranden $2x = \ln((1+t)/(1-t))$, so gelangt man nach kurzer Rechnung zu dem Ausdruck:

$$\frac{M_{i\tau, p/2}(i\zeta)}{(i\zeta)^{(p+1)/2}} = \frac{\Gamma(p+1)}{2^{p-1}\left|\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+i\tau\right)\right|^2} \cdot \int_0^\infty \frac{\cos(2\tau x - (\zeta/2)\cdot \mathfrak{Tg}\, x)}{\mathfrak{Cof}^{p+1} x} \cdot \mathrm{d}x \quad . \; . \; . \; . \quad (5.1).$$

Wir wenden hierin auf die cos-Funktion das Additionstheorem an und machen sodann von den beiden Gl. (5.2a, b) Gebrauch. Nach einer bekannten Formel von Lommel [4] besteht

$$\cos(\zeta/2\cdot\mathfrak{Tg}\, x) = \frac{1}{2}\cdot\{\pi\zeta\cdot\mathfrak{Tg}\, x\}^{1/2}\cdot J_{-\frac{1}{2}}(\zeta/2\cdot\mathfrak{Tg}\, x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.2a),$$

$$\sin(\zeta/2\cdot\mathfrak{Tg}\, x) = \frac{1}{2}\cdot\{\pi\zeta\cdot\mathfrak{Tg}\, x\}^{1/2}\cdot J_{+\frac{1}{2}}(\zeta/2\cdot\mathfrak{Tg}\, x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.2b)$$

nun aber die für alle λ gültige Entwicklung (5.3). Geht man mit ihr in die beiden Teilintegrale

$$J_\nu(\lambda\cdot z) = \lambda^\nu \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda^2)^m\cdot(z/2)^m}{m!}\cdot J_{\nu+m}(z) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.3)$$

von (5.1) ein und vertauscht darnach, was hier zulässig ist, die Reihenfolge von Integration und Summation, so stößt man auf Integrale, die sich alle auf das nach [12] auflösbare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x i}\cdot \mathrm{d}x}{\mathfrak{Cof}^n(\beta x+\gamma)} = \frac{2^{n-1}}{\beta\cdot\Gamma(n)}\cdot e^{-i\gamma\alpha/\beta}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{i\alpha}{2\beta}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{i\alpha}{2\beta}\right) \qquad \begin{matrix}\alpha \text{ reell}\\ \Re n>0 \text{ für } \beta,\gamma \text{ reell}\end{matrix} \quad . \; . \quad (5.4)$$

Fouriersche Integral (5.4) zurückführen lassen. Damit ergibt sich schließlich nach geeigneter Zusammenfassung der Glieder die in τ und ζ unbeschränkt und absolut konvergente

$$\left.\begin{aligned} \frac{M_{i\tau, p/2}(i\zeta)}{(i\zeta)^{(p+1)/2}} &= \pi^{1/2}\cdot\frac{\Gamma\left(1+\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)}\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1+\lambda\right)}\cdot\frac{|\zeta/4|^{\lambda+1/2}}{\lambda!}\cdot\prod_{r=0}^{\lambda-1}\left[1+\frac{\tau^2}{\left(\frac{p+1}{2}+r\right)^2}\right] \\ &\times\left\{J_{\lambda-\frac{1}{2}}(|\zeta/2|)+\frac{\operatorname{sgn}\zeta\cdot\tau}{\frac{p+1}{2}+\lambda}\cdot J_{\lambda+\frac{1}{2}}(|\zeta/2|)\right\} \qquad (\tau>0,\ \zeta \gtrless 0) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (5.5)$$

Reihenentwicklung (5.5). Für $\lambda = 0$ ist hierin das unter dem Summenzeichen auftretende Produkt einfach gleich 1 zu setzen. Für die erste Ableitung des auf der linken Seite von (5.1) stehenden Ausdrucks nach ζ und τ und für seine zweite Ableitung nach ζ und τ zugleich, die gleichfalls benötigt werden, ergeben sich die ganz ähnlich aufgebauten Beziehungen (5.6), (5.7) und (5.8), in denen die innere Summe über r für $\lambda = 0$ gleich Null ist

*) Die Abschnitte 1 bis 4 des Berichtes sind in dieser Zeitschrift, Bd 23 (1943), S 47 bis 58 erschienen.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{M_{i\tau,p/2}(i\zeta)}{(i\zeta)^{(p+1)/2}}\right]=\pi^{1/2}/2\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+\lambda\right)}{\left(\frac{p+1}{2}+\lambda\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}+1+\lambda\right)}\cdot\frac{|\zeta/4|^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\lambda!}\cdot\prod_{r=0}^{\lambda-1}\left(1+\frac{\tau^2}{\left(\frac{1+p}{2}+r\right)^2}\right)\\&\times\left\{\tau\cdot J_{\lambda-\frac{1}{2}}(|\zeta/2|)-\operatorname{sgn}\zeta\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{p+1}{2}\right)-\tau^2}{\lambda+1+(p/2)}\cdot J_{\lambda+\frac{1}{2}}(|\zeta/2|)\right\}\qquad(\tau>0,\ \zeta\gtreqless0)\end{aligned}\right\}\quad(5.6)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{M_{i\tau,p/2}(i\zeta)}{(i\zeta)^{(p+1)/2}}\right]=\pi^{1/2}\cdot\frac{\Gamma\left(1+\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1+\lambda\right)}\cdot\frac{|\zeta/4|^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\lambda!}\cdot\prod_{r=0}^{\lambda-1}\left[1+\frac{\tau^2}{\left(\frac{1+p}{2}+r\right)^2}\right]\\&\hspace{30em}(\tau>0,\ \zeta\gtreqless0)\\&\times\left\{2\cdot J_{\lambda-\frac{1}{2}}(|\zeta/2|)\cdot\sum_{r=0}^{\lambda-1}\frac{\tau}{\left(\frac{p+1}{2}+r\right)^2+\tau^2}+\frac{\operatorname{sgn}\zeta}{\frac{p+1}{2}+\lambda}\cdot J_{\lambda+\frac{1}{2}}(|\zeta/2|)\cdot\left[1+\sum_{r=0}^{\lambda-1}\frac{2\tau^2}{\left(\frac{p+1}{2}+r\right)^2+\tau^2}\right]\right\}\end{aligned}\right\}\quad(5.7)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial\tau\,\partial\zeta}\left[\frac{M_{i\tau,p/2}(i\zeta)}{(i\zeta)^{(p+1)/2}}\right]=\pi^{1/2}/2\cdot\frac{\Gamma\left(1+\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+\lambda\right)}{\left(\frac{p+1}{2}+\lambda\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}+1+\lambda\right)}\cdot\frac{|\zeta/4|^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\lambda!}\cdot\prod_{r=0}^{\lambda-1}\left[1+\frac{\tau^2}{\left(\frac{p+1}{2}+r\right)^2}\right]\\&\hspace{30em}\tau>0,\ \zeta\lesseqgtr0\\&\times\left\{J_{\lambda-\frac{1}{2}}(|\zeta/2|)\left[1+2\cdot\sum_{r=0}^{\lambda-1}\frac{\tau^2}{\left(\frac{p+1}{2}+r\right)^2+\tau^2}\right]+\frac{\operatorname{sgn}\zeta\cdot2\tau}{\lambda+1+(p/2)}\cdot J_{\lambda+\frac{1}{2}}(|\zeta/2|)\left[1-\sum_{r=0}^{\lambda-1}\frac{\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{p+1}{2}\right)-\tau^2}{\left(\frac{p+1}{2}+r\right)^2+\tau^2}\right]\right\}\end{aligned}\right\}\quad(5.8)$$

Aus den obigen Gleichungen geht hervor, daß die Funktion (5.1) für alle reellen Werte von τ und ζ selbst reell ist. Ihrer Integraldarstellung zufolge ändert sie ihren Wert nicht, wenn τ und ζ gleichzeitig ihr Vorzeichen wechseln. Demnach gelten die obigen Entwicklungen auch für negative Werte von τ, nachdem das wirkliche Vorzeichen von ζ in das entgegengesetzte verwandelt worden ist. Für $\zeta\to0$ gehen die linken Seiten der Gl. (5.5) ... (5.8) gegen die in den Gl. (5.9a, b, c, d) angegebenen Grenzwerte. Geht andererseits $\tau\to0$, so gelten

$$\lim_{\zeta=0}\left[\frac{M_{i\tau,p/2}(i\zeta)}{(i\zeta)^{(p+1)/2}}\right]=1\quad(5.9\,\mathrm{a}),\qquad\lim_{\zeta=0}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{M_{i\tau,p/2}(i\zeta)}{(i\zeta)^{(p+1)/2}}\right]=\frac{\tau}{p+1}\quad(5.9\,\mathrm{b})$$

$$\lim_{\zeta=0}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{M_{i\tau,p/2}(i\zeta)}{(i\zeta)^{(p+1)/2}}\right]=0\quad(5.9\,\mathrm{c}),\qquad\lim_{\zeta=0}\frac{\partial^2}{\partial\tau\,\partial\zeta}\left[\frac{M_{i\tau,p/2}(i\zeta)}{(i\zeta)^{(p+1)/2}}\right]=\frac{1}{p+1}\quad(5.9\,\mathrm{d})$$

die vier Grenzwertgleichungen (5.10a, b, c, d). Sie ergeben sich aus einer bei N. Nielsen angegebenen Formel [13], die in dem Kapitel XIX, § 106, dieses Buches zu finden ist. Sie

$$\lim_{\tau=0}\left[\frac{M_{i\tau,p/2}(i\zeta)}{(i\zeta)^{(p+1)/2}}\right]=\Gamma\left(1+\frac{p}{2}\right)\cdot(4/\zeta)^{p/2}\cdot J_{p/2}(\zeta/2)\quad(5.10\,\mathrm{a}),$$

$$\lim_{\tau=0}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{M_{i\tau,p/2}(i\zeta)}{(i\zeta)^{(p+1)/2}}\right]=-1/2\cdot\Gamma\left(1+\frac{p}{2}\right)\cdot(4/\zeta)^{p/2}\cdot J_{1+p/2}(\zeta/2)\quad(5.10\,\mathrm{b}),$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{\tau=0}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{M_{i\tau,p/2}(i\zeta)}{(i\zeta)^{p+1/2}}\right]\\&=\pi^{1/2}\cdot\frac{\Gamma\left(1+\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)}\cdot\operatorname{sgn}\zeta\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+\lambda\right)}{\left(\frac{p+1}{2}+\lambda\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}+1+\lambda\right)}\cdot\frac{|\zeta/4|^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\lambda!}\cdot J_{\lambda+\frac{1}{2}}(|\zeta/2|)\end{aligned}\right\}\quad(5.10\,\mathrm{c}),$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{\tau=0}\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau\,\partial\zeta}\cdot\frac{M_{i\tau,p/2}(i\zeta)}{(i\zeta)^{(p+1)/2}}\right]\\&=\frac{\pi^{1/2}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)}\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+\lambda\right)}{\left(\frac{p+1}{2}+\lambda\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}+1+\lambda\right)}\cdot\frac{|\zeta/4|^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\lambda!}\cdot J_{\lambda-\frac{1}{2}}(|\zeta/2|)\end{aligned}\right\}\quad(5.10\,\mathrm{d})$$

leisten sehr nützliche Dienste sowohl bei der Bestimmung der Lage der Nullstellen von (5.5) und (5.6) als zu Kontrollzwecken.

Für die numerische Berechnung eignen sich die obigen Reihen etwa für Werte von $\tau < 5$ und für Werte von $\zeta < 6 \dots 7$. Wir benötigen also noch einer Darstellung der obigen Funktionen, die sich insbesondere auch für große Werte von τ gebrauchen läßt. Um sie zu erhalten, schreiben wir das Integral (5.1) als eines mit den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$, das die Exponentialfunktion an Stelle der cos-Funktion enthält. Der Faktor vor dem Integralzeichen ist dann nur halb so groß. Für ein $\tau > 0$ darf in diesem neuen Integral der Integrationsweg längs der reellen Achse ohne Änderung seines Wertes durch den unendlich fernen Halbkreis der oberen x-Halbebene, falls er nur nicht gerade durch eine Nullstelle des Nenners geht, zu einem geschlossenen Weg ergänzt werden. Innerhalb dieses Weges liegen die unendlich vielen, wesentlich singulären Stellen $x = (\pi/2) \cdot i \cdot (2\lambda + 1)$ mit $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ Wir denken sie uns zunächst durch kleine Kreise aus dem Integrationsbereich ausgeschlossen. Für die Umläufe längs dieser Kreise um die einzelnen singulären Stellen nimmt das Integral bis auf einen für diese Zwischenbetrachtung unwesentlichen Faktor die Form an:

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} (e^{+\pi i (p-1)})^{\lambda} \cdot e^{-\pi\tau(2\lambda+1)} \times \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{i(2\tau z - (\zeta/2)\cdot \mathfrak{Cotg}\, z)}}{(\mathfrak{Sin}\, z)^{p+1}} \cdot \mathrm{d}z .$$

Da hierin das Integral von λ gar nicht abhängt, so läßt sich die Summation ohne weiteres ausführen. Das Umlaufsintegral selbst kann aber mittels der Hilfsfunktion $\varphi(z)$

$$\varphi(z) = \left(\frac{z}{\mathfrak{Sin}\, z}\right)^{p+1} \cdot e^{-i\cdot(\zeta/2)(\mathfrak{Cotg}\, z - z^{-1})} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda}^{(p)}(\zeta) \cdot (iz)^{\lambda} \qquad (|z| < \pi) \quad . \; . \; . \quad (5.11)$$

von Gl. (5.11) auch in der Gestalt des Integrals

$$(1/2\pi i) \cdot \oint \frac{e^{i(2\tau z - (\zeta/2)\cdot z^{-1})}}{z^{p+1}} \cdot \varphi(z) \cdot \mathrm{d}z$$

geschrieben werden. Macht man hierin nach der Substitution $z = (t/2)(\zeta/\tau)^{1/2}$ von der bekannten Formel (5.12) Gebrauch und löst den ganzen Integranden in eine doppelt unendliche

$$e^{i\cdot(\tau\zeta)^{1/2}\cdot(t - t^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n \cdot J_n(2i\sqrt{\tau\zeta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (it)^n \cdot I_n(2\sqrt{\tau\zeta}) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5.12)$$

Reihe auf, so verschwinden in der Entwicklung nach der Ausführung der Integration alle Glieder mit einer anderen Potenz als t^{-1}. In Rücksicht auf die durch Gl. (5.13) beschriebene Umbenennung der Koeffizienten entsteht auf diese Weise schließlich für die Funktion von Gl. (5.1) die neue Darstellung durch Gl. (5.14a). Sie gilt den bisherigen Annahmen gemäß

$$a_{p+\lambda}^{(p)}(\zeta) = (-)^{\lambda} \cdot c_{p+\lambda}^{(p)}(\zeta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5.13)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{M_{i\tau, p/2}(i\zeta)}{(i\zeta)^{(p+1)/2}} &= \frac{2\pi \cdot \Gamma(p+1)}{2^p \cdot (e^{+\pi\tau} + (-)^p \cdot e^{-\pi\tau}) \cdot \left|\Gamma\left(\frac{p+1}{2} + i\tau\right)\right|^2} \\ &\cdot \left\{\sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4\tau}\right)^{\lambda} \cdot c_{p+\lambda}^{(p)}(\zeta) \cdot (2\sqrt{\tau\zeta})^{\lambda} \cdot I_{\lambda}(2\sqrt{\tau\zeta}) + \sum_{\lambda=1}^{p} (-4\tau)^{\lambda} \cdot c_{p-\lambda}^{(p)}(\zeta) \cdot (2\sqrt{\tau\zeta})^{-\lambda} \cdot I_{\lambda}(2\sqrt{\tau\zeta})\right\} \\ &\qquad \begin{pmatrix} \tau > 0, \ \zeta > 0 \\ \tau < 0, \ \zeta < 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} (5.14\,a)$$

zunächst nur für positive Werte von τ und ζ. Nach der Integraldarstellung (5.1) muß sie aber unverändert bestehen bleiben, wenn beide Parameter negative Werte haben, und tatsächlich trifft diese Behauptung auch an der Reihe zu. Treten sie mit den entgegengesetzten Vorzeichen auf, so braucht man nur in Gl. (5.14a) etwa ζ durch $|\zeta| \cdot e^{\pm\pi i}$ zu ersetzen und die bekannte Umlaufsrelation der Besselschen Funktionen anzuwenden. Die dadurch entstehende Entwicklung lautet:

$$\left.\begin{aligned}\frac{M_{i\tau,\,p/2}(i\zeta)}{(i\zeta)^{(p+1)/2}} &= \frac{2\pi\cdot\Gamma(p+1)}{2^p\left(e^{+\pi\tau}+(-)^p e^{-\pi\tau}\right)\cdot\left|\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+i\tau\right)\right|^2} \\ &\cdot\left\{\sum_{\lambda=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4\tau}\right)^{\lambda}\cdot c_{p+\lambda}^{(p)}(\zeta)\left(2\sqrt{|\tau\zeta|}\right)^{\lambda} J_\lambda\left(2\sqrt{|\tau\zeta|}\right)+\sum_{\lambda=1}^{p}(-4\tau)^{\lambda}\cdot c_{p-\lambda}^{(p)}(\zeta)\cdot\left(2\sqrt{|\tau\zeta|}\right)^{-\lambda}\cdot J_\lambda\left(2\sqrt{|\tau\zeta|}\right)\right\} \\ &\qquad\begin{pmatrix}\tau<0,\ \zeta>0\\ \tau>0,\ \zeta<0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\quad(5.14\,\mathrm{b}).$$

Die in den Gl. (5.14) auftretenden Reihenkoeffizienten lassen sich unabhängig von den übrigen Rechnungen aus Gl. (5.11) gesondert bestimmen. Für sie gilt bis zu einem $\lambda \leqq 7$ die allgemeine Formel (5.15). Für $\lambda = 3$ z. B. besteht darnach $c_\lambda^{(p)}$ nur aus zwei Gliedern, da $1/(-1)!$ usw. verschwindet.

$$\left.\begin{aligned}c_\lambda^{(p)}(\zeta) &= \frac{(\zeta/6)^\lambda}{\lambda!}+\frac{5p+2\lambda+1}{3\cdot 5}\cdot\frac{(\zeta/6)^{\lambda-2}}{2!(\lambda-2)!}+\frac{7\cdot(5p)^2+28(\lambda-1)\cdot 5p+28\lambda^2-32\lambda-15}{3\cdot 5^2\cdot 7}\cdot\frac{(\zeta/6)^{\lambda-4}}{4!(\lambda-4)!} \\ &+\frac{7\cdot(5p)^3+21\cdot(2\lambda-5)\cdot(5p)^2+(84\lambda^2-348\lambda+89)\cdot 5p+56\lambda^3-516\lambda^2+2986\cdot\lambda-9111}{3^2\cdot 5^2\cdot 7}\cdot\frac{(\zeta/6)^{\lambda-6}}{6!(\lambda-6)!}\end{aligned}\right\}\quad(5.15).$$

Da für $\lambda \to \infty$ sowohl die Funktion $J_\lambda\left(2\sqrt{|\tau\zeta|}\right)$ als auch die Funktion $I_\lambda\left(2\sqrt{|\tau\zeta|}\right)$ asymptotisch durch den Ausdruck

$$\left(\sqrt{2\pi\cdot\lambda}\right)^{-1}\cdot\exp\left[-\lambda\cdot\ln\left(\lambda/\left(e\sqrt{|\tau\zeta|}\right)\right)\right]$$

angenähert wird und sich dabei nach einer bekannten Abschätzungsformel für die Koeffizienten $\left|c_\lambda^{(p)}\right|$ die Ungleichung $\left|c_\lambda^{(p)}\right| < (\pi\cdot|\zeta/2|)^{-\frac{p+1}{2}}\cdot\pi^{-\lambda}\cdot\lambda^{\frac{p+1}{2}}\cdot e^{\sqrt{|\zeta/2|\cdot\lambda/\pi}}$ berechnet, so konvergieren die Reihen (5.14 a, b) absolut und unbeschränkt, und zwar sowohl in bezug auf τ als auch in bezug auf ζ. Für größere Werte von ζ werden sie allerdings für die numerische Berechnung sehr bald ungeeignet.

Der besondere Aufbau der obigen beiden Reihen gestattet ohne Mühe auch die Herstellung der ersten Ableitung nach ζ. Wir geben die dafür geltende Beziehung jedoch nur für den Fall an, in dem τ und ζ gleiche Vorzeichen haben, da ein Blick auf die Gl. (5.14 a, b) sofort erkennen läßt, welche Änderungen der entgegengesetzte Fall verlangt. Es ist darnach

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left(\frac{M_{i\tau,\,p/2}(i\zeta)}{(i\zeta)^{(p+1)/2}}\right) &= -\frac{\pi\cdot\Gamma(p+1)}{2^p\cdot\left(e^{\pi\tau}+(-)^p e^{-\pi\tau}\right)}\cdot\frac{1}{\left|\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+i\tau\right)\right|^2} \\ &\cdot\left\{\sum_{\lambda=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4\tau}\right)^{\lambda}\cdot C_{p+\lambda}^{(p)}(\zeta)\cdot\left(2\sqrt{\tau\zeta}\right)^{\lambda}\cdot I_\lambda\left(2\sqrt{\tau\zeta}\right)+\sum_{\lambda=1}^{p+1}(-4\tau)^{\lambda}\cdot C_{p-\lambda}^{(p)}\cdot\frac{I_\lambda\left(2\sqrt{\tau\zeta}\right)}{\left(2\sqrt{\tau\zeta}\right)^{\lambda}}\right\}\ \begin{pmatrix}\tau>0,\ \zeta>0\\ \tau<0,\ \zeta<0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\quad(5.16)$$

und hierin ist bis zu einem $\lambda \gtreqqless 6$:

$$\left.\begin{aligned}C_\lambda^{(p)}(\zeta) &= \frac{(\zeta/6)^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!}+\frac{5p+2\lambda-7}{10}\cdot\frac{(\zeta/6)^{\lambda-1}}{3!(\lambda-1)!} \\ &+\frac{7\cdot(5p)^2+28\cdot(\lambda-5)\cdot 5p+28\lambda^2-256\lambda-129}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{(\zeta/6)^{\lambda-3}}{5!(\lambda-3)!} \\ &+\frac{7\cdot(5p)^3+21\cdot(2\lambda-13)\cdot(5p)^2+(84\lambda^2-1020\lambda+665)\cdot 5p+(56\lambda^3-1188\lambda^2+3082\lambda-7035)}{3^2\cdot 5^2} \\ &\cdot\frac{(\zeta/6)^{\lambda-5}}{7!(\lambda+5)!}\end{aligned}\right\}\quad(5.16\,\mathrm{a}).$$

Auf die Angabe der Formeln, die bei der vorliegenden Entwicklungsart den früheren Gl. (5.8) und (5.9) entsprechen, soll an dieser Stelle verzichtet werden. Dagegen mag hier noch der Hinweis Platz finden, daß die Kenntnis der Funktion (5.1) und ihrer ersten Ableitung nach ζ

$$m_{i\tau}^{(p)}(i\zeta) = (\pi/2)^{1/2}\cdot(i\zeta)^{p/2}\cdot\frac{M_{i\tau,\,p/2}(i\zeta)}{(i\zeta)^{(p+1)/2}}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(5.17\,\mathrm{a}),$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}m_{i\tau}^{(p)}(i\zeta) = i\cdot(\pi/2)^{1/2}\cdot(i\zeta)^{(p/2)-1}\cdot\left\{\frac{p}{2}\cdot\frac{M_{i\tau,\,p/2}(i\zeta)}{(i\zeta)^{(p+1)/2}}+\zeta\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{M_{i\tau,\,p/2}(i\zeta)}{(i\zeta)^{(p+1)/2}}\right)\right\}\quad\ldots\quad(5.17\,\mathrm{b})$$

gemäß den Gl. (5.17 a, b) auch zugleich über das Verhalten der Wellenfunktion $m_{i\tau}^{(p)}(i\zeta)$ und deren erster Ableitung nach ζ unterrichtet.

Ist im Falle eines $\tau > 0$, $\zeta < 0$ der Parameter τ sehr groß, so ist nach Gl. (5.14 b) in erster Nährerung

$$\frac{M_{i\tau, p/2}(i\zeta)}{(i\zeta)^{(p+1)/2}} \approx \frac{\Gamma(p+1)}{(\tau/\zeta)^{p/2}} \cdot J_p(2\sqrt{|\tau\zeta|}).$$

Wegen des großen Wertes von τ kann man hierin an Stelle der Besselschen Funktion ihre asymptotische Näherung verwenden. Wird dann noch wegen $\zeta < 0$ wie bisher $z = |\zeta| \cdot \exp(-\pi i/2)$ und $\nu = \tau \cdot \exp(+\pi i/2)$ gesetzt, so wird $|\tau\zeta| = \nu z$, und es entsteht für $M_{\nu, p/2}(z)$ selbst die folgende asymptotische Darstellung:

$$M_{\nu, p/2}(z) \sim \frac{\Gamma(p+1)}{\pi^{1/2} \cdot \nu^{p/2}} \cdot (z/\nu)^{1/4} \cdot \cos(2\sqrt{\nu z} - \pi p/2 - \pi/4) \quad \ldots \ldots \quad (5.18).$$

Sie ist in dieser Form, wie man aus Gl. (5.14 a) ersieht, auch dann noch gültig, wenn ν und z imaginäre Zahlen gleichen Vorzeichens sind.

Überhaupt ist zu den vorstehenden Entwicklungen zu bemerken, daß ihre Gültigkeit keineswegs auf die Annahme rein imaginärer Werte von z und ν beschränkt ist. Das folgt einmal aus dem Prinzip der analytischen Fortsetzung, da die beiden Reihen (5.5) und (5.14 a) ihre absolute und unbeschränkte Konvergenz nicht einbüßen, wenn darin ζ durch z/i und τ durch ν/i ersetzt wird. Es geht dies aber auch aus der Integraldarstellung (5.1) hervor. Schreibt man diese nämlich in der Form des Integrals (5.19) und verfügt darin über den

$$\frac{M_{\nu, p/2}(z)}{z^{(p+1)/2}} = \frac{\Gamma(p+1)}{2^p \cdot \Gamma\left(\frac{p+1}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}-\nu\right)} \cdot \int_{\infty \cdot \exp\left(\frac{\pi i}{2}+i\chi\right)}^{\infty \cdot \exp\left(\frac{\pi i}{2}-i\chi\right)} e^{2\nu s - (z/2)\mathfrak{Tg}\, s} \cdot \frac{ds}{\mathfrak{Cof}^{p+1} s} \qquad \begin{array}{l} |\chi| < \pi/2 \\ p = 0, 1, 2 \\ |\operatorname{arc} z| < \pi \end{array} \quad \ldots \quad (5.19)$$

Verlauf des Integrationsweges, daß er im Endlichen sämtliche Nullstellen von $\mathfrak{Cof}\, s$ mit $\mathfrak{Im}(s) > 0$ zu umschlingen hat, so kann man sich leicht davon überzeugen, daß (5.19) in der Tat eine Lösung der Differentialgleichung (5.20) für $M_{\nu, p/2}(z) \cdot z^{-\frac{p+1}{2}}$ darstellt, falls am Anfang und Ende des Weges mit $\nu = |\nu| \cdot e^{i\sigma}$

$$y'' + \frac{p+1}{z} \cdot y' + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\nu}{z}\right] \cdot y = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5.20)$$

$$2 \cdot |\nu| \cdot \sin(\sigma \pm \chi) + (p+1) \cdot |\sin\chi| > 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5.21\,\text{a})$$

ist. Für $\sigma = \chi = \pi/2$ und $z = i \cdot \zeta$ geht das Integral (5.19) in das frühere Integral (5.1) über. Für die Integralgrenzen $\infty \cdot \exp(-\pi i/2 + i\chi)$ als obere und $\infty \cdot \exp(-\pi i/2 - i\chi)$ als untere Grenze gilt von (5.19) das gleiche. Es muß dann nur statt (5.21 a) die Bedingung

$$2 \cdot |\nu| \cdot \sin(\sigma \pm \chi) < (p+1) \cdot |\sin\chi| \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5.21\,\text{b})$$

erfüllt sein. Der die beiden Enden des Integrationsweges von (5.19) verbindende unendlich ferne Kreisbogen muß natürlich, damit er nur einen verschwindenden Beitrag liefert, so geführt werden, daß er die imaginäre Achse der s-Ebene zwischen zwei Polen durchschneidet. Da der Winkel in den beiden Ungleichungen (5.21 a, b) beliebig klein gemacht werden kann, so darf z. B. in (5.19) $\sigma = \operatorname{arc}(\nu)$ einen Wert haben, der im Bereich $\delta < \sigma < \pi - \delta$ mit $\delta > 0$ liegt. Der Übergang von dem Integral (5.19) zu den Reihen (5.5) und (5.14 a) läßt sich wie früher durchführen.

Aus der Tatsache der für alle Werte von $z = i\zeta$ und $\nu = i \cdot \tau$ bestehenden absoluten und unbeschränkten Konvergenz der Reihe (5.5) folgt aufs neue, daß die Funktion $M_{\nu, p/2}(z)$ sowohl in z als auch in ν eine ganze transzendente Funktion ist, die in ν zugleich eindeutig ist. Das gleiche gilt dann in Rücksicht auf die Gl. (2.5 a, b) von der Funktion $W_{\nu, p/2}(z)$.

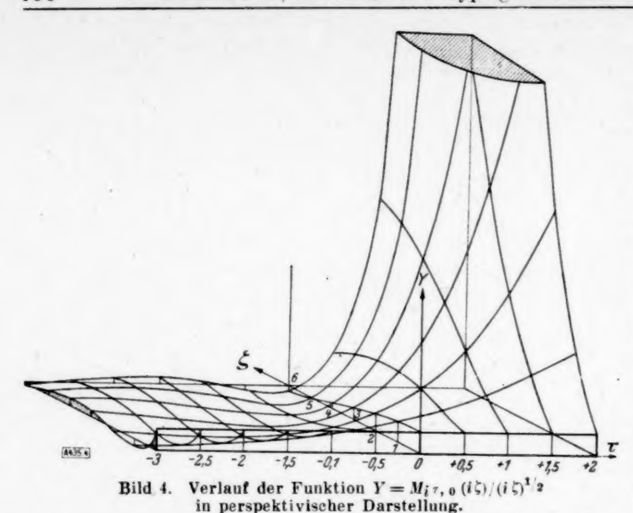


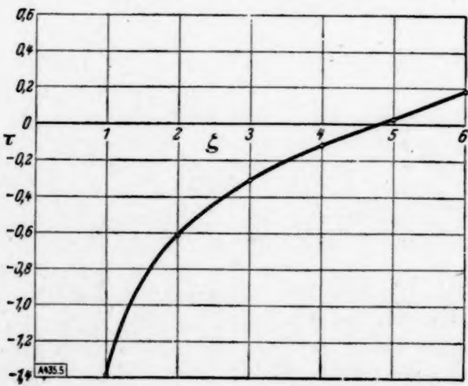
Bild 4. Verlauf der Funktion $Y = M_{i\tau,0}(i\zeta)/(i\zeta)^{1/2}$ in perspektivischer Darstellung.

a) Der kurvenmäßige Verlauf und die Nullstellen der Funktionen $m_{i\tau}^{(0)}(i\zeta)$ und $\partial m_{i\tau}^{(0)}(\zeta)/\partial\zeta$. Eine anschauliche Vorstellung von dem durch (5.5) und (5.14) berechenbaren Verlauf der Funktion $m_{i\tau}^{(0)}(i\zeta)$ vermitteln das Bild 4 und die Zahlentafel I. Beide zeigen ihn in dem Bereich $|\tau| < 3{,}5$ in sogen. perspektivischer Darstellung, und zwar für ein $p = 0$ und für die Parameterwerte $\zeta = 0, 1, 2 \ldots 6$.

Aus dem Bild läßt sich zugleich angenähert die Lage der kleinsten Nullstellen ersehen. Mit zunehmenden Werten von ζ rückt darnach die erste Nullstelle von $m_{i\tau}^{(0)}(i\zeta)$ in bezug auf τ bei gegebenem ζ schnell von großen negativen Werten gegen Null. Die Stelle $\tau = 0$ selbst bildet nach Gl. (5.10a) die kleinste Nullstelle für diejenige Funktion $m_{i\tau}^{(0)}(i\zeta)$, die dem Argument $\zeta = 2\,j_{01} = 4{,}80\,966$ entspricht. Für noch größere ζ-Werte wird die kleinste Wurzel in bezug auf τ dann sogar positiv. Um eine bequeme Interpolation zu ermöglichen, ist in Bild 5 die Abhängigkeit der kleinsten Wurzeln τ_1 von ζ graphisch wiedergegeben. Die Zahlentafel II bringt die Nullstellen mit einer Genauigkeit bis zu 4 Dezimalstellen. Eine formelmäßige Darstellung gerade der kleinsten Wurzel dürfte schwerlich anzugeben sein. Dagegen macht es keine Schwierigkeit, eine Formel für die direkte Berechnung der größeren

Zahlentafel I. Tafel der Funktionswerte von $(2/\pi)^{1/2} \cdot m_{i\tau}^{(0)}(i\zeta)$.

τ	$\zeta =$ 1	2	3	4	5	6
− 3,0	− 0,37 563	− 0,16 606	+ 0,20 121	+ 0,27 635	+ 0,10 531	− 0,11 433
− 2,5	− 0,31 625	− 0,28 622	+ 0,06 538	+ 0,27 081	+ 0,23 487	+ 0,05 262
− 2,0	− 0,20 975	− 0,36 984	− 0,11 413	+ 0,16 083	+ 0,27 646	+ 0,21 582
− 1,5	− 0,04 493	− 0,37 540	− 0,28 980	+ 0,06 512	+ 0,16 918	+ 0,26 647
− 1,0	+ 0,19 117	− 0,24 492	− 0,36 802	− 0,27 812	− 0,08 766	+ 0,10 393
− 0,5	+ 0,51 333	+ 0,10 038	− 0,18 712	− 0,32 765	− 0,33 052	− 0,23 019
± 0,0	+ 0,93 847	+ 0,76 520	+ 0,51 183	+ 0,22 389	− 0,04 384	− 0,26 005
+ 0,5	+ 1,48 581	+ 1,88 634	+ 2,12 354	+ 2,14 197	+ 1,92 148	+ 1,48 343
+ 1,0	+ 2,17 715	+ 3,64 000	+ 5,22 859	+ 6,72 328	+ 7,87 791	+ 8,46 297
+ 1,5	+ 3,03 711	+ 6,25 044	+ 10,65 797	+ 16,03 922	+ 22,00 278	+ 27,83 341
+ 2,0	+ 4,09 346	+ 10,00 013	+ 19,57 552	+ 33,38 606	+ 51,48 380	+ 73,21 734
+ 2,5	+ 5,37 740	+ 15,24 174	+ 33,58 23	+ 63,60 201	108,16 81	169,11 05
+ 3,0	+ 6,92 391	+ 22,41 207	+ 54,84 81	113,91 17	210,92 53	357,70 20



Zahlentafel II.

Tabelle der kleinsten Wurzeln τ_1 der Gl. $m_{i\tau}^{(0)}(i\zeta) = 0$.

ζ	τ_1	ζ	τ_1
0	$-\infty$	4	− 0,12 190
1	− 1,39 097	4,80 966	± 0
2	− 0,61 138	5	+ 0,02 685
3	− 0,30 959	6	+ 0,17 600

Bild 5 (links). Die ζ-Abhängigkeit der kleinsten Nullstelle der Gleichung $M_{i\tau,0}(i\zeta)/(i\zeta)^{1/2} = 0$ in bezug auf τ.

Zahlentafel III. Tafel der Funktionswerte von $(2/\pi)^{1/2} \cdot \partial m_{i\tau}^{(0)}(i\zeta)/\partial\zeta$.

τ zugleich $\zeta=0$	ζ = 1	2	3	4	5	6
− 3,0	− 0,23 608	+ 0,42 689	+ 0,24 085	− 0,07 712	− 0,23 281	− 0,18 381
− 2,5	− 0,41 782	+ 0,30 946	+ 0,31 940	+ 0,07 915	− 0,13 274	− 0,20 678
− 2,0	− 0,56 027	+ 0,13 386	+ 0,31 184	+ 0,20 931	+ 0,02 036	− 0,12 828
− 1,5	− 0,63 739	− 0,07 431	+ 0,20 166	+ 0,25 251	+ 0,16 525	+ 0,04 155
− 1,0	− 0,61 717	− 0,26 525	+ 0,00 202	+ 0,15 859	+ 0,20 545	+ 0,16 601
− 0,5	− 0,46 069	− 0,35 647	− 0,21 494	− 0,06 777	+ 0,05 611	+ 0,13 611
± 0,0	− 0,12 113	− 0,22 003	− 0,27 847	− 0,28 836	− 0,24 855	− 0,16 953
+ 0,5	+ 0,45 727	+ 0,33 049	+ 0,13 445	− 0,10 105	− 0,33 634	− 0,52 939
+ 1,0	+ 1,34 052	+ 1,55 810	+ 1,58 179	+ 1,36 585	+ 0,90 437	+ 0,23 746
+ 1,5	+ 2,60 614	+ 3,82 446	+ 4,95 719	+ 5,76 625	+ 6,01 385	+ 5,49 712
+ 2,0	+ 4,34 471	+ 7,61 989	+ 11,63 415	+ 15,99 89	+ 20,08 99	+ 23,13 43
+ 2,5	+ 6,66 146	+ 13,57 127	+ 23,65 25	+ 36,87 62	+ 52,57 345	+ 69,33 19
+ 3,0	+ 9,67 811	+ 22,52 96	+ 43,96 59	+ 76,07 41	+ 119,99 1	+ 175,24 4

und ganz großen Wurzeln aufzustellen. Beschränkt man sich dabei auf den Fall $p=0$, so errechnet sich dafür aus (5.14b) der folgende Näherungsausdruck:

$$2\sqrt{|\tau_n \zeta|} \sim j_{0n} - \frac{\zeta^2/6}{j_{0n}} + \frac{2/3 \cdot \zeta^2 + \zeta^4/60 - \zeta^6/1944}{j_{0n}^3} \quad \text{mit } J_0(j_{0n}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5.22).$$

Wendet man ihn für die ζ-Werte der Tabelle auf die Berechnung der zweiten und dritten Nullstellen an, so ergibt sich aus (5.22) τ_n bereits mit einer Genauigkeit, die der auf graphischem Wege erreichbaren gleichkommt.

Das Bild 6 bringt eine perspektivische Darstellung von dem Verlauf der Funktion $\partial m_{i\tau}(i\zeta)/\partial\zeta$ für den gleichen Bereich von τ und ζ wie vordem. Das Bild 7 veranschaulicht die Abhängigkeit der ersten drei Nullstellen dieser Funktion vom Argument ζ. Die Zahlentafeln III und IV ergänzen diese mehr qualitativen Angaben nach der numerischen Seite hin. Sie entstammen der unter [23] erwähnten Arbeit des Verfassers.

Die numerische Berechnung und die Aufzeichnung der genannten beiden Funktionen hat in dankenswerter Weise Herr N. Karsmenkoff durchgeführt.

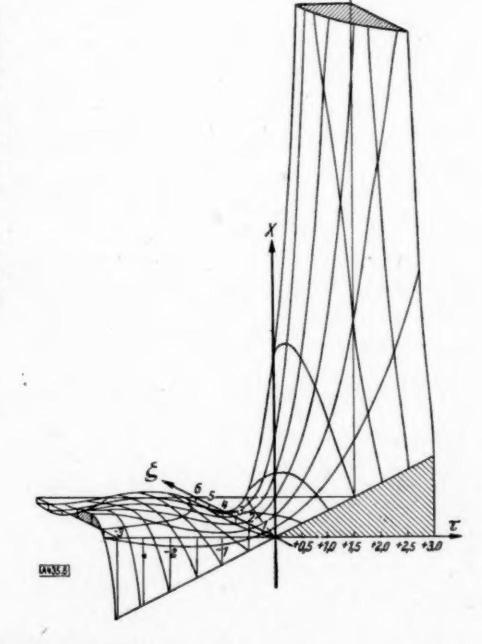


Bild 6.
Der Verlauf der Funktion $X = \frac{\partial}{\partial\zeta} M_{i\tau,0}(i\zeta)/(i\zeta)^{1/2}$ in perspektivischer Darstellung.

6. Eine besondere Entwicklung für $W_{i\tau,0}(i\zeta)$.

Für die Anwendungen ist es außerdem erforderlich, auch für die Funktion $W_{\nu,p/2}(z)$ bei rein imaginären Werten von ν und z über eine für die numerische Berechnung geeignete Reihenentwicklung zu verfügen. Wir wollen sie an dieser Stelle nur für den wichtigsten Sonderfall $p=0$ herleiten. Setzen wir zu diesem Zweck p zunächst noch als ein wenig von Null verschieden voraus und bilden mittels (3.3a) die Gl. (2.5a) nach, so führt der Grenzübergang $p \to 0$ unter dem Integralzeichen ohne weiteres zu der Formel:

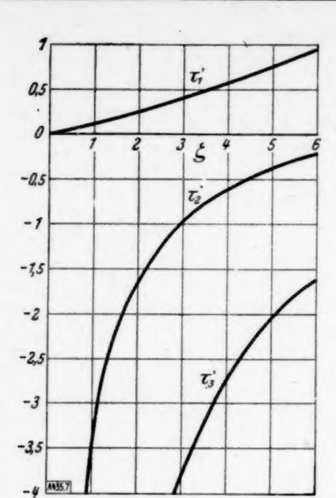


Bild 7 (links). 1. 2. und 3. Nullstelle von $\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{M_{i\tau,0}(i\zeta)}{\sqrt{i\zeta}}\right)$ in Abhängigkeit von ζ.

Zahlentafel IV.

Tafel der ersten drei Nullstellen τ_1', τ_2', τ_3' von $m'_{i\tau}{}^{(0)}(i\zeta)$.

ζ	τ_1'	τ_2'	τ_3'
0	0	$-\infty$	$-\infty$
1	+ 0,12361	− 3,5893	− 12,92
2	+ 0,26004	− 1,6756	− 5,99
3	+ 0,40715	− 0,9956	− 3,84
4	+ 0,57031	− 0,6310	− 2,75
5	+ 0,74854	− 0,3957	− 2,06
6	+ 0,93881	− 0,2236	− 1,58

$$\left.\begin{aligned}\frac{W_{i\tau,0}(i\zeta)}{(i\zeta)^{1/2}} &= \Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)\cdot\Bigg[\left\{\pi i\cdot\mathfrak{Tg}\,\pi\tau+\Psi\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)-\ln|\zeta/4|-\frac{\pi i}{2}\cdot\operatorname{sgn}\zeta\right\}\\ &\cdot\frac{M_{i\tau,0}(i\zeta)}{(i\zeta)^{1/2}}-\frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\tau}{\pi}\cdot\int\limits_{-1}^{+1}\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{i\tau}\cdot\frac{\ln(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}\cdot e^{(i\zeta/2)\cdot t}\cdot dt\Bigg]\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6.1).$$

Das hierin auftretende Integral läßt sich ganz ebenso behandeln wie das Integral (3.3a) zu Beginn des Abschnitts 5. Auch die übrigen Integrale, auf die man bei der weiteren Auswertung stößt, sind alle wie früher auflösbar, denn da in (5.4) der Parameter n, sofern nur $\Re(n)>0$ ist, ganz beliebige Werte haben darf, so kann man ihm auch die Form $n=n+\varepsilon$ geben. Die Differentiation nach ε mit dem nachfolgenden Grenzübergang $\varepsilon\to 0$ führt dann

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\alpha x i}\cdot\ln\mathfrak{Cof}(\beta x+\gamma)}{\mathfrak{Cof}^n(\beta x+\gamma)}\cdot dx &= \frac{2^{n-2}}{\beta\cdot\Gamma(n)}\cdot e^{-i\gamma\alpha/\beta}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{i\alpha}{2\beta}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{i\alpha}{2\beta}\right)\\ &\times\left\{2\cdot\Psi(n)-\ln 4-\Psi\left(\frac{n}{2}+\frac{i\alpha}{2\beta}\right)-\Psi\left(\frac{n}{2}-\frac{i\alpha}{2\beta}\right)\right\}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6.2)$$

unmittelbar von Gl. (5.4) zu der noch allgemeineren Formel (6.2). Die weiteren Rechnungen reihen sich mühelos aneinander, und für das in (6.1) auftretende Integral entsteht auf diese Weise die absolut und unbeschränkt konvergente Reihenentwicklung (6.3), die für die nume-

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\tau}{\pi}\cdot\int\limits_{-1}^{+1}\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{i\tau}\cdot\frac{\ln(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}\cdot e^{(i\zeta/2)\cdot t}\cdot dt &= \sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\lambda!\,\lambda!}\,|\zeta/4|^{\lambda+\frac{1}{2}}\cdot\prod_{r=0}^{\lambda-1}\left[1+\frac{\tau^2}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2}\right]\\ \times\Bigg\{\Bigg[2\cdot\Psi(2\lambda+1)-\Psi\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)&-\sum_{r=0}^{\lambda-1}\frac{2r+1}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2}-\ln 4\Bigg]\\ \begin{pmatrix}\tau>0,\\ \zeta\gtrless 0\end{pmatrix}\quad\left[J_{\lambda-\frac{1}{2}}(|\zeta/2|)+\operatorname{sgn}\zeta\cdot\frac{2\tau}{2\lambda+1}\cdot J_{\lambda+\frac{1}{2}}(|\zeta/2|)\right]&+\operatorname{sgn}\zeta\cdot\frac{4\tau}{(2\lambda+1)^2}\cdot J_{\lambda+\frac{1}{2}}(|\zeta/2|)\Bigg\}\end{aligned}\right\} \quad (6.3)$$

rische Berechnung unter den gleichen Bedingungen geeignet ist wie die Reihe (5.5). Die entsprechende Reihe für die Funktionen $W_{i\tau,p/2}(i\zeta)$ mit $p=1,2,\ldots$ kann nötigenfalls aus der Reihe (6.3) und ihrer Ableitung nach ζ mit Hilfe der gleich zu erwähnenden Rücklaufformeln hergeleitet werden.

An allgemeinen Erkenntnissen, die die Gl. (6.1) erschließt, ist noch die Feststellung von Wichtigkeit, daß, während sich die Funktion $m_{i\tau}^{(0)}(i\zeta)$ bei einem gleichzeitigen Vorzeichenwechsel von τ und ζ überhaupt nicht ändert, die Funktion $w_{i\tau}^{(0)}(i\zeta)$ dabei in die konjugiert komplexe Größe übergeht.

7. Die Rücklaufformeln für die Wellenfunktionen m und w.

Wie für die meisten der höheren transzendenten Funktionen, die in der mathematischen Physik eine Rolle spielen, so bestehen aus bekannten Gründen auch für die beiden konfluenten hypergeometrischen Funktionen Beziehungen der Art, die je drei dieser Funktionen in eine homogene und lineare Abhängigkeit voneinander bringen. Jedoch tritt uns hier der Fall entgegen, daß diese Beziehungen für die m- und w-Funktionen verschieden ausfallen[6]). Man gewinnt sie für beliebige Zeigerwerte am bequemsten aus den Integraldarstellungen (3.4) oder (4.1), indem man darin als Integranden die Ableitungen der wirklichen Integranden nach der jeweiligen Integrationsvariablen benutzt. Da diese Integrale natürlich einen verschwindenden Wert haben müssen, andererseits die Differentiation aber auch ausgeführt werden kann, so liefert dieses Verfahren sofort eine verschwindende dreigliedrige Summe, in der jeder Summand hinterher als eine m- oder w-Funktion gedeutet werden kann. Hat man erst einmal einige wenige solcher Beziehungen aufgefunden, so lassen sich aus ihnen durch geeignete Kombination zahlreiche weitere Formeln gewinnen. Auch die Gl. (2.4) und (2.7) können dazu mit Erfolg herangezogen werden. Einige der grundlegenden Beziehungen dieser Art teilen wir im folgenden mit:

$$w_\nu^{(p)}(z) = \left(-\nu + \frac{1 \mp p}{2}\right) \cdot w_{\nu-1}^{(p)}(z) + z^{1/2} \cdot w_{\nu-\frac{1}{2}}^{(p \pm 1)}(z) \quad \ldots \ldots (7.1),$$

$$z \cdot w_\nu'^{(p)}(z) = \left(+\nu - \frac{1+z}{2}\right) \cdot w_\nu^{(p)}(z) - \left(p^2/4 - \left(\nu - \frac{1}{2}\right)^2\right) \cdot w_{\nu-1}^{(p)}(z) \quad \ldots \ldots (7.2\text{a}),$$

$$z \cdot w_\nu'^{(p)}(z) = w_\nu^{(p)}(z) \cdot \left(\frac{z-1}{2} - \nu\right) - w_{\nu+1}^{(p)}(z) \quad \ldots \ldots (7.2\text{b}),$$

$$(p+1) \cdot z \cdot w_\nu'^{(p)}(z) = z \cdot \left(\nu - \frac{p+1}{2}\right) \cdot w_\nu^{(p+2)}(z) + \left(\frac{p \cdot (p+1)}{2} - \nu \cdot z\right) \cdot w_\nu^{(p)}(z) \quad \ldots \ldots (7.3),$$

$$\left(\left(\nu - \frac{1}{2}\right)^2 - p^2/4\right) \cdot w_{\nu-1}^{(p)}(z) + w_{\nu+1}^{(p)}(z) + (2\nu - z) \cdot w_\nu^{(p)}(z) = 0 \quad \ldots \ldots (7.4),$$

$$m_\nu^{(p)}(z) = m_{\nu \pm 1}^{(p)}(z) \pm \frac{z^{1/2}}{p+1} \cdot m_{\nu \pm 1/2}^{(p+1)}(z) \quad \ldots \ldots (7.5),$$

$$z \cdot m_\nu'^{(p)}(z) = \left(\nu - \frac{1+z}{2}\right) \cdot m_\nu^{(p)}(z) + \left(\frac{p+1}{2} - \nu\right) \cdot m_{\nu-1}^{(p)}(z) \quad \ldots \ldots (7.6),$$

$$(p+1)\, z \cdot m_\nu'^{(p)}(z) = z \cdot \frac{\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \nu^2}{(p+1)(p+2)} \cdot m_\nu^{(p+2)}(z) + \left\{\frac{p\,(p+1)}{2} - \nu z\right\} \cdot m_\nu^{(p)}(z) \quad \ldots \ldots (7.7),$$

$$(2\nu - z) \cdot m_\nu^{(p)}(z) = \left(\nu - \frac{p+1}{2}\right) \cdot m_{\nu-1}^{(p)}(z) + \left(\nu + \frac{p+1}{2}\right) m_{\nu+1}^{(p)}(z) \quad \ldots \ldots (7.8).$$

Der Ableitungsstrich bedeutet darin wie immer eine Differentiation nach dem Argument.

8. Die Asymptotik der M- und W-Funktionen.

Zur Beurteilung von Konvergenzfragen bei Reihen und Integralen ist es sehr erwünscht, das Verhalten der Funktionen M und W zu kennen, wenn entweder das Argument z oder die Zeiger ν und p in verschiedenen Richtungen ihrer Ebenen ins Unendliche gehen.

a) Das asymptotische Verhalten für $z \to \infty$. Für den Fall, daß es das Argument selbst ist, das gegen ∞ strebt, zeigt von den in Rede stehenden Funktionen die Funktion $W_{\nu, p/2}(z)$ das einfachere Verhalten. Die dafür maßgebende Formel (8.1) läßt sich am bequemsten aus der Integraldarstellung (4.6) dieser Funktion herleiten, und zwar einfach dadurch, daß man den Integrationsweg nach links [3] verschiebt. Eine andere Möglichkeit, die asymptotische Entwicklung der Funktion $W_{\nu, p/2}$ zu gewinnen, bietet die Gl. (4.1), indem man darin $v - 1 = u/z$ setzt und den Faktor $(1 + u/z)$ mit dem Exponenten $(p-1)/2 + \nu$ in die binomische Reihe entwickelt. Die entstehende Reihe hat nach einem bekannten Satz [4] in der Tat asymptotischen Charakter. Die auftretenden Integrale lassen sich durchweg durch Gammafunktionen ausdrücken.

---

[6]) Diese Unbequemlichkeit ließe sich vermeiden, wenn man anstatt mit den Funktionen m und w mit den verallgemeinerten Laguerre-Funktionen arbeiten würde. Das bringt jedoch bei den physikalischen Anwendungen wieder den Nachteil mit sich, daß die Schreibweise weit weniger geschlossen ausfällt, da man es hier immer mit den Funktionen m und w zu tun hat.

$$W_{\nu,p/2}(z) \sim z^{\nu} \cdot e^{-z/2} \cdot {}_2F_0\left(\frac{1+p}{2} - \nu, \frac{1-p}{2} - \nu; -1/z\right) \quad |\arc z| < \pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.1).$$

Die entsprechende Darstellung für die Funktion $M_{\nu,p/2}(z)$ ergibt sich dann ohne weitere Rechnung aus der Beziehung (2.9). In der Bezeichnungsweise der Gl. (8.1) lautet sie:

$$\left.\begin{aligned} M_{\nu,p/2}(z) \sim\; & z^{-\nu} \cdot e^{z/2} \cdot \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1+p}{2} - \nu\right)} \cdot {}_2F_0\left(\frac{1+p}{2} + \nu, \frac{1-p}{2} + \nu; z^{-1}\right) \\ & + z^{\nu} \cdot e^{-z/2} \cdot e^{\pm \pi i \left(\nu - \frac{p+1}{2}\right)} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1+p}{2} + \nu\right)} \cdot {}_2F_0\left(\frac{1-p}{2} - \nu, \frac{1+p}{2} - \nu; -z^{-1}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (8.2).$$

In Übereinstimmung mit den früheren Festsetzungen ist in (8.2) das $+$-oder das $-$-Zeichen zu wählen, je nachdem $-3\pi/2 < \arc(z) < +\pi/2$ oder $-\pi/2 < \arc(z) < +3\pi/2$ ist. Die Zeiger p und ν können in (8.1) und (8.2) jeden beliebigen endlichen Wert haben, der $\Gamma(p+1)$ nicht unendlich macht. Ist im besonderen $\nu = n + (p+1)/2$ und n eine nichtnegative ganze Zahl, so geht in der rechten z-Halbebene für $z \to \infty$ die Funktion $M_{\nu,p/2}(z)$ exponentiell gegen Null, weil das erste Glied in (8.2) dann fortfällt.

b) Das asymptotische Verhalten für $\nu \to \infty$. Der andere Grenzfall, bei dem für endliche Werte von z und p der Parameter ν über alle Grenzen wächst, ist für die Funktion $M_{\nu,p/2}(z)$ wenigstens unter der Annahme eines reellwertigen ν u. a. bereits von O. Perron [10] untersucht worden. Er bedient sich dabei der Sattelpunktsmethode in der von ihm verallgemeinerten Form und wendet sie auf die Integraldarstellung (3.2a) an. Den allgemeineren Fall eines $\nu \to \infty$ mit $\Re\nu > 0$ hat nach der gleichen Methode A. Erdelyi [7] an dem Integral (3.6) behandelt. Das Ergebnis dieser Untersuchungen läßt sich auf die Form der

$$M_{\nu,p/2}(z) \sim \frac{\Gamma(p+1)}{\pi^{1/2} \cdot \nu^{p/2}} \cdot (z/\nu)^{1/4} \cdot \cos\left(2\sqrt{\nu z} - \pi p/2 - \pi/4\right) \quad (\Re\nu \geqq 0) \quad . \quad . \quad . \quad (8.3a)$$

Gl. (8.3a) bringen. Wie der Vergleich mit (5.18) zeigt, trifft demnach in der Tat die Vermutung zu, daß der asymptotische Näherungsausdruck (8.3a), der bisher nur unter der Annahme eines $\Re\nu > 0$ bewiesen worden ist, auch noch für rein imaginäre Werte von ν gültig ist. Aus Gl. (2.4a, b) folgt dann, daß für die Funktion $M_{-\nu,p/2}(z)$ mit $\Re\nu > 0$ die Dar-

$$M_{-\nu,p/2}(z) \sim \frac{\Gamma(p+1)}{\pi^{1/2} \cdot \nu^{p/2}} \cdot (z/\nu)^{1/4} \cdot e^{\mp\left(p+\frac{1}{2}\right)\cdot \pi i/2} \cdot \cos\left(2\sqrt{\nu z} \cdot e^{\pm \pi i/2} - \pi p/2 - \pi/4\right) \quad (\Re\nu \geqq 0) \quad (8.3b)$$

stellung (8.3b) gelten muß. Dabei dürfte es sich wohl von selbst verstehen, daß, wenn das Argument der cos-Funktion in (8.3a, b) eine imaginäre Komponente besitzt, nur diejenige der beiden sie zusammensetzenden Exponentialfunktionen beibehalten zu werden braucht, die den größeren Absolutbetrag hat.

Wird p zunächst als nicht ganzzahlig angenommen, so können die entsprechenden asymptotischen Ausdrücke für die Funktion $W_{+\nu,p/2}$ und $W_{-\nu,p/2}$ mit Hilfe der beiden oben angegebenen Formeln aus den Gl. (2.4a, b) hergeleitet werden. Für ein $\Re\nu > 0$ und $\nu \to \infty$ ergeben sich damit die Gl. (8.4a, b). Da in ihnen der Parameter p gar nicht vorkommt, so

$$W_{\nu,p/2}(z) \sim -2^{1/2} \cdot e^{-\nu + \nu \cdot \ln \nu} \cdot (z/\nu)^{1/4} \cdot \sin\left(2\sqrt{z\nu} - \pi\nu - \pi/4\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.4a),$$

$$W_{-\nu,p/2}(z) \sim 2^{-1/2} \cdot e^{+\nu - \nu \cdot \ln \nu} \cdot (z/\nu)^{1/4} \cdot e^{-2\sqrt{z\nu}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.4b)$$

gelten sie auch für ganzzahlige Werte von p. Der unendlich ferne Punkt der ν-Ebene ist nach diesen Gleichungen ein wesentlich singulärer Punkt.

Um diese Verhältnisse in einem einzelnen Falle noch besser zu übersehen, möge an Hand der obigen Formeln im besonderen der Fall betrachtet werden, daß $z = |z| \cdot \exp(\pm \pi i/2)$ ist, da bei der eingangs erwähnten physikalischen Aufgabe das Argument der Wellenfunktionen tatsächlich diesen Aufbau hat, und wir wollen uns vornehmen, die Beziehungen für die asymptotischen Absolutbeträge der Funktionen M und W aufzustellen, wenn sich der sehr weit entfernte Punkt der ν-Ebene mit $\nu = |\nu| \cdot \exp(i\chi)$ auf einem Kreis mit dem Radius $|\nu| \to \infty$ bewegt. Die Gl. (8.3a, b) ergeben für diesen Fall die beiden Beziehungen:

$$|M_{\nu,p/2}(|z| \cdot e^{\pm \pi i/2})| \sim \frac{\Gamma(p+1)}{2 \cdot \pi^{1/2} \cdot |\nu|^{p/2}} \cdot |z/\nu|^{1/4} \cdot e^{2\sqrt{|z\nu|} \cdot \left|\sin\left(\frac{\chi}{2} \pm \frac{\pi}{4}\right)\right|} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.5a),$$

$$\left(|\chi| \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$|M_{-\nu,p/2}(|z| \cdot e^{\pm \pi i/2})| \sim \frac{\Gamma(p+1)}{2 \cdot \pi^{1/2} \cdot |\nu|^{p/2}} \cdot |z/\nu|^{1/4} \cdot e^{2\sqrt{|z\nu|} \cdot \left|\sin\left(\frac{\chi}{2} \pm \frac{\pi}{4}\right)\right|} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.5b).$$

Es folgt daraus: Die Funktion $M_{\nu, p/2}(|z| \cdot \exp(\pm \pi i/2))$ wächst in allen Richtungen der ν-Ebene für $\nu \to \infty$ selbst über alle Grenzen. Sie bleibt nur endlich, falls für ein $\operatorname{arc}(z) = +\pi/2$ ν auf dem Strahl $\operatorname{arc}(-\pi/2)$ gegen ∞ geht oder für $\operatorname{arc}(z) = -\pi/2$ auf dem Strahl $\operatorname{arc}(+\pi/2)$. Dieses Resultat ist in voller Übereinstimmung mit den Ergebnissen des Abschnittes 5.

Ein ganz anderes Verhalten zeigt unter sonst gleichen Voraussetzungen die Funktion $W_{\nu, p/2}(z)$. Hier führen die beiden Gl. (8.4 a, b) zu den folgenden beiden Formeln:

$$\left.\begin{array}{l} |W_{\nu, p/2}(|z| \cdot e^{\pm \pi i/2})| \sim \left|\dfrac{z}{4\nu}\right|^{1/4} \\ \cdot \exp\left\{+|\nu| \cdot \cos\chi \cdot \ln\dfrac{|\nu|}{e} + |\nu \cdot \sin\chi| \cdot [\pi - |\chi|] + (\mp) 2\sqrt{|z\nu|} \cdot \sin\left(\dfrac{\chi}{2} \pm \dfrac{\pi}{4}\right)\right\} \end{array}\right\} \quad |\chi| \leqq \pi/2 \quad \ldots (8.6\text{a}),$$

$$\left.\begin{array}{l} |W_{-\nu, p/2}(|z| \cdot e^{\pm \pi i/2})| \sim \left|\dfrac{z}{4\nu}\right|^{1/4} \\ \cdot \exp\left\{-|\nu| \cdot \cos\chi \cdot \ln\dfrac{|\nu|}{e} + |\nu| \cdot \chi \cdot \sin\chi - 2\sqrt{|z\nu|} \cdot \cos\left(\dfrac{\chi}{2} \pm \dfrac{\pi}{4}\right)\right\} \end{array}\right\} \quad \ldots (8.6\text{b}).$$

In Gl. (8.6a) bezieht sich dabei das eingeklammerte Doppelvorzeichen nicht wie in den anderen Fällen auf die Wahl $z = |z| \cdot \exp(\pm \pi i)$, sondern es entspricht den beiden Möglichkeiten eines $\chi \gtreqless 0$. Da das erste Glied in der geschweiften Klammer der Gl. (8.6a, b), sei es nun positiv oder negativ, für ein $|\nu| \to \infty$ bereits die Größenordnung der links stehenden Funktion bestimmt, so wächst demnach die Funktion $W_{\nu, p/2}$ in der rechten ν-Halbebene mit ν über alle Grenzen, während sie in der linken Halbebene unter jede endliche Grenze sinkt. Eine Nutzanwendung wird von den letzten beiden Gleichungen bei der Aufstellung der Gl. (10.9) gemacht.

c) Das asymptotische Verhalten für $p \to \infty$. Schließlich mögen der Vollständigkeit halber auch noch die Formeln angeführt werden, aus denen sich das asymptotische Verhalten für $p \to \infty$ ersehen läßt. Dabei werden wir uns auf die Funktion $M_{\nu, p/2}(z)$ beschränken. Es sind dann immer noch zwei Fälle zu unterscheiden.

Im ersten Fall ist der vordere Zeiger von p unabhängig. Auf Grund der Integraldarstellung (3.2 a) findet man dann mit Hilfe der Sattelpunktsmethode leicht heraus, daß unter dieser Bedingung das Verhalten von $M_{\nu, p/2}(z)$ für ein $|\operatorname{arc}(p)| < \pi/2$ durch die Gl. (8.7a) be-

$$M_{\nu, p/2}(z) \sim z^{(p+1)/2} \quad (|\operatorname{arc} p| < \pi/2) \quad \ldots (8.7\text{a});$$

$$M_{\mu + \frac{p+1}{2}, p/2}(z) \sim z^{\frac{1+p}{2}} \cdot e^{-z/2} \quad (|\operatorname{arc} p| < \pi) \quad \ldots (8.7\text{b})$$

schrieben wird. Zu dem gleichen Ergebnis ist auf andere Weise auch A. Erdelyi [10] gelangt.

Im zweiten Falle hänge auch der vordere Zeiger von p ab, indem etwa wie bei den Laguerre-Polynomen $\nu = \mu + (p+1)/2$ ist. Die Funktion $M_{\nu, p/2}(z)$ zeigt dann das durch Gl. (8.7b) wiedergegebene Verhalten. Es folgt dies unmittelbar aus der Erklärungsgleichung (2.2a), und die Behauptung bleibt gültig im ganzen Winkelraum $|\operatorname{arc}(p)| < \pi$.

9. Die Wronskische Determinante zweier linear unabhängiger Wellenfunktionen. Das System der Eigenfunktionen eines Rotationsparaboloides.

Gemäß ihrer Definition erfüllen die beiden durch die Gl. (1.12a, b) eingeführten Wellenfunktionen nach (2.1b) die selbstadjungierte Differentialgleichung (9.1)

$$(z \cdot y'(z))' - \left\{\frac{z}{4} - \nu + \frac{p^2}{4z}\right\} y(z) = 0 \quad \ldots (9.1).$$

Wir betrachten zwei verschiedene solcher Funktionen, die zu den Parametern ν_1, p_1 und ν_2, p_2 gehören und die wir demgemäß mit $y_{\nu_1}^{(p_1)}$ und $y_{\nu_2}^{(p_2)}$ bezeichnen wollen. Eine wechselseitige Multiplikation der für $y_{\nu_1}^{(p_1)}$ geltenden Differentialgleichung mit $y_{\nu_2}^{(p_2)}$ und umgekehrt führt dann mit nachfolgender Subtraktion beider Gleichungen zu der Beziehung (9.2), aus der

$$\frac{d}{dz}\left\{z\left[y_{\nu_2}^{(p_2)} \cdot y_{\nu_1}^{\prime(p_1)} - y_{\nu_2}^{\prime(p_2)} y_{\nu_1}^{(p_1)}\right]\right\} + \left[\nu_1 - \nu_2 - \frac{p_1^2 - p_2^2}{4z}\right] \cdot y_{\nu_1}^{(p_1)} \cdot y_{\nu_2}^{(p_2)} = 0 \quad \ldots (9.2)$$

sich eine Reihe wichtiger Folgerungen ziehen lassen.

Wir prüfen als ersten besonderen Fall die Annahme

$$y_{\nu_1}^{(p_1)} = m_\nu^{(p)}(z), \qquad y_{\nu_2}^{(p_2)} = w_\nu^{(p)}(z).$$

Dann ist in Gl. (9.2) $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ und $p_1 = p_2 = p$ zu setzen, und es muß dann nach dieser Gleichung

$$z \cdot \left[m_\nu'^{(p)}(z) \cdot w_\nu^{(p)}(z) - m_\nu^{(p)}(z) \cdot w_\nu'^{(p)}(z)\right] = \text{Const}$$

sein. Um hierin den Wert der Konstanten zu bestimmen, betrachten wir den Grenzfall $z \to \infty$ an Hand der im Abschnitt 8 mitgeteilten Formeln (8.1) und (8.2). Sie führen nach kurzer Rechnung zu der wichtigen Beziehung:

$$m_\nu'^{(p)}(z) \cdot w_\nu^{(p)}(z) - m_\nu^{(p)}(z) \cdot w_\nu'^{(p)}(z) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2} - \nu\right)} \cdot (1/z) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9.3).$$

Mit Hilfe der Rücklaufformeln des Abschnitts 7 lassen sich aus ihr zahlreiche weitere Zusammenhänge ähnlicher Art auffinden. Als Beispiel bringen wir die Gleichungen:

$$m_{\nu-1}^{(p)}(z) \cdot w_\nu^{(p)}(z) + \left(\frac{p-1}{2} + \nu\right) \cdot m_\nu^{(p)}(z) \cdot w_{\nu-1}^{(p)}(z) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+3}{2} - \nu\right)} \quad . \; . \; . \; . \quad (9.3\text{a}),$$

$$w_\nu^{(p)}(z) \cdot w_{-\nu}'^{(p)}(z \cdot e^{+\pi i}) + w_\nu'^{(p)}(z) \cdot w_{-\nu}^{(p)}(z \cdot e^{+\pi i}) = + \frac{\pi}{2} \cdot e^{-\pi i \nu + \pi i/2}(1/z) \quad . \; . \; . \; . \quad (9.3\text{b}).$$

Wird in Gl. (9.3) $\nu = n + (p+1)/2$ mit n als einer nichtnegativ ganzen Zahl, so verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung, worin sich lediglich auf andere Weise die schon durch Gl. (4.3) belegte Tatsache ausdrückt, daß die Funktionen $w_\nu^{(p)}(z)$ und $m_\nu^{(p)}(z)$ für den angegebenen Wert von ν bis auf einen von z unabhängigen Faktor übereinstimmen. Für $\nu = 0$ entsteht aus Gl. (9.3) im Hinblick auf die Gl. (4.8a) und (5.10a) eine bekannte Formel aus der Theorie der Zylinderfunktionen.

In einem zweiten Sonderfall von Gl. (9.2) sei $p_1 = p_2 = p$, $\nu_1 = n + (p+1)/2$ und $\nu_2 = n' + (p+1)/2$ mit n und n' als zwei positiven ganzen oder verschwindenden Zahlen. Wird dann noch y der Wellenfunktion m gleichgesetzt, so geht nach Abschnitt 8a die Funktion m für $x \to \infty$ mit $\operatorname{arc}(x) = 0$ exponentiell gegen Null. Die Funktion $m_{n+(p+1)/2}^{(p)}(x)$ ist daher im ganzen Grundgebiet $0 \ldots \infty$ endlich und stetig und besitzt dort in bezug auf x wegen ihres polynomialen Faktors n voneinander verschiedene positive Wurzeln. Nach Gl. (9.2) ist dann für alle $n \neq n'$:

$$\int_0^\infty m_{n+\frac{p+1}{2}}^{(p)}(x) \cdot m_{n'+\frac{p+1}{2}}^{(p)}(x) \cdot dx = 0 \qquad (n \neq n') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9.4\text{a}).$$

Ist aber $n = n'$, so setzen wir zunächst $n' = n + \varepsilon$ und lassen hierin $\varepsilon \to 0$ gehen. Das Verhalten von $m_{n'+(p+1)/2}^{(p)}(x)$ für $x \to \infty$ muß dann aber, da $n + \varepsilon$ nicht mehr ganzzahlig ist, aus der vollständigen Formel (8.2) erschlossen werden. Die Berücksichtigung dieses Umstandes führt sofort auf die Beziehung (9.4b). Sie entspricht einer bekannten Formel aus

$$\int_0^\infty m_{n+\frac{p+1}{2}}^{(p)}(x) \cdot m_{n+\frac{p+1}{2}}^{(p)}(x) \cdot dx = \frac{\pi}{2} \cdot \Gamma^2(p+1) \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+p+1)} \quad . \; . \; . \; . \quad (9.4\text{b})$$

der Theorie der Laguerre-Polynome. Zusammen mit der Gl. (9.4a) besagt sie, daß die aus diesen Polynomen ableitbaren Wellenfunktionen in dem reellen Grundgebiet $0 \ldots \infty$ ein vollständiges Orthogonalsystem bilden mit den Randbedingungen, für $z = 0$ endlich zu bleiben und für $z \to \infty$ exponentiell zu verschwinden.

In Verbindung mit der Wellengleichung in den Koordinaten eines Rotationsparaboloides ist jedoch von größerer Bedeutung das Orthogonalsystem, das aus den Funktionen $m_\nu^{(p)}(z)$ mit rein imaginären Werten von ν und z gebildet werden kann. Um zu ihm zu gelangen, setzen wir in einem dritten Sonderfall von Gl. (9.2) $p_1 = p_2 = p$, $\nu = i\tau$, $z = i\zeta$ und identifizieren wieder die Lösung y von Gl. (9.1) mit der Funktion m. Nach Abschnitt 5 hat dann sowohl diese Funktion selbst als auch ihre erste Ableitung nach ζ für jeden festen Wert von ζ unendlich viele einfache Nullstellen in bezug auf τ, die sich z. B. für ein $\zeta > 0$ ins negativ Unendliche erstrecken. Ihre Einfachheit wird sich sogleich zu erkennen geben. Die unendliche Folge dieser Wurzeln möge mit τ_n oder τ_n' bezeichnet werden mit $n = 1, 2, 3, \ldots$. Zuerst beschäftige uns der Fall der Wurzelfolge τ_n von Gl. (9.5a):

$$m_{i\tau_n}^{(p)}(i\zeta_0) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9.5\text{a})$$

und es mögen τ_n und $\tau_{n'}$ zwei verschiedene unter den unendlich vielen Wurzeln dieser Gleichung sein. Nach einer Integration über ζ zwischen den Grenzen 0 und ζ nimmt dann die Gl. (9.2) zunächst die Form an:

$$\zeta\cdot\left\{m_{i\tau_{n'}}^{(p)}(i\zeta)\cdot m_{i\tau_n}'^{(p)}(i\zeta)-m_{i\tau_n}^{(p)}(i\zeta)\cdot m_{i\tau_{n'}}'^{(p)}(i\zeta)\right\}+i\cdot(\tau_n-\tau_{n'})\cdot\int_0^{\zeta} m_{i\tau_n}^{(p)}(i\zeta)\cdot m_{i\tau_{n'}}^{(p)}(i\zeta)\cdot \mathrm{d}\zeta=0 \quad (9.6).$$

Für ein $\zeta=\zeta_0$ von Gl. (9.5a) folgt daraus sofort die Beziehung (9.7a), die den orthogonalen Charakter der Eigenfunktionen beweist, falls dabei der Annahme gemäß $n \neq n'$ ist.

$$\int_0^{\zeta_0} m_{i\tau_n}^{(p)}(i\zeta)\cdot m_{i\tau_{n'}}^{(p)}(i\zeta)\cdot \mathrm{d}\zeta=0 \quad (n\neq n') \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9.7a)$$

Ist aber $n=n'$, so setzen wir wiederum $n'=n+\varepsilon$ und also $\tau_{n'}=\tau_n+\delta$ und vollziehen an der Gl. (9.6) den Grenzübergang $\varepsilon,\delta\to 0$. Auf diese Weise entsteht dann ohne Schwierigkeit als Gegenstück zu Gl. (9.7a) die Formel:

$$\int_0^{\zeta_0} m_{i\tau_n}^{(p)}(i\zeta)\cdot m_{i\tau_n}^{(p)}(i\zeta)\cdot \mathrm{d}\zeta=-\zeta_0\cdot\left(\frac{\partial\, m_{i\tau_n}(i\zeta)}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_0}\cdot\left(\frac{\partial\, m_{i\tau}(i\zeta_0)}{\partial\tau}\right)_{\tau=\tau_n} \quad \ldots \quad (9.7b).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung kann mit Hilfe der im Abschnitt 5 aufgestellten Formeln auch numerisch berechnet werden.

Wir betrachten darnach den Fall der Gl. (9.5b). Ein ganz ähnlicher Berechnungs-

$$m_{i\tau_{n'}}'^{(p)}(i\zeta_0)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9.5b)$$

vorgang führt hier von Gl. (9.6) geradeswegs zu dem Gleichungspaar (9.8a, b). Das System der Wellenfunktionen $m_{i\tau}^{(p)}(i\zeta_0)$ mit den Bedingungsgleichungen (9.5a) oder (9.5b) ist wegen

$$\int_0^{\zeta_0} m_{i\tau_n}^{(p)}(i\zeta)\cdot m_{i\tau'_{n'}}^{(p)}(i\zeta)\cdot \mathrm{d}\zeta=0 \quad (n\neq n') \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9.8a),$$

$$\int_0^{\zeta_0} m_{i\tau'_n}^{(p)}(i\zeta)\cdot m_{i\tau_n}^{(p)}(i\zeta)\cdot \mathrm{d}\zeta=\zeta_0\cdot m_{i\tau'_n}^{(p)}(i\zeta_0)\cdot\left\{\frac{\partial^2 m_{i\tau}(i\zeta)}{\partial\tau\cdot\partial\zeta}\right\}_{\substack{\tau=\tau'_n\\ \zeta=\zeta_0}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9.8b)$$

$\zeta_0=2k\cdot\xi_0$ als das zu dem Rotationsparaboloid $\xi=\xi_0$ zugeordnete System von orthogonalen Eigenfunktionen zu betrachten. Sie liegen über dem Grundgebiet $0\ldots 2k\cdot\xi_0$ und erfüllen an seinem rechten Randpunkt die Gl. (9.5a) oder (9.5b) und am linken Randpunkt die Forderung des Endlichbleibens. Die unter diesen Bedingungen für sie gültige Eigenwertgleichung nimmt für $z=i\zeta$ und $\nu=-i\cdot\tau$ gemäß Gl. (9.1) die besondere Form der Gl. (9.9) an. Die Voll-

$$(\zeta\cdot y')'+\{\zeta/4-p^2/4\zeta\}\cdot y+\tau\cdot x=0 \quad (y'=\mathrm{d}y/\mathrm{d}\zeta) \quad \ldots\ldots \quad (9.9)$$

ständigkeit des Orthogonalsystems ist nach dem Gang der Herleitung in Abschnitt 5 evident. Ebenso bestätigen die Gl. (9.7b) und (9.8b) durch ihren Aufbau unmittelbar die schon eingangs ausgesprochene Behauptung von der Einfachheit der Nullstellen, denn da in diesen Gleichungen die linke Seite in Rücksicht auf (5.5) stets von Null verschieden ist, so muß es auch die rechte Seite sein.

10. Die Beziehungen für die einfachsten Wellentypen in den Koordinaten eines Rotationsparaboloides.

Wir betrachten an erster Stelle als die einfachste Form einer Wellenbewegung die ebene Welle. Das Bezugssystem der (x, y, z), dessen z-Achse wie in Bild 1 mit der Rotationsachse des Paraboloides zusammenfallen möge, sei zu dieser ebenen Welle in der Weise orientiert, daß die Wellenbewegung parallel zur xz-Ebene vor sich geht. Das Bezugssystem der (x', y', z'), das mit dem ersten Achsenkreuz die y-Achse gemeinsam habe, und zwar in der Art, daß die x'- und z'-Achse in die xz-Ebene fallen, zeige mit seiner z'-Achse in die Richtung des Strahlvektors der Welle. Ist dann χ der Winkel zwischen der z- und der z'-Achse, so besteht für die maßgebende skalare Wellenfunktion in leicht erkennbarer Bedeutung der Größe ϱ die Beziehung:

$$\Phi(x,y,z)=e^{ikz'}=e^{ik(z\cdot\cos\chi+x\cdot\sin\chi)}=e^{ik(z\cdot\cos\chi+\varrho\cdot\cos\varphi\cdot\sin\chi)} \quad \ldots\ldots \quad (10.1).$$

Auf Grund einer bekannten Formel aus der Theorie der Zylinderfunktionen läßt sich aber diesem Ausdruck, wenn δ_{pq} den Kroneckerschen Zahlenfaktor bedeutet, die Form geben:

$$\Phi(x,y,z) = e^{ik\cdot\cos\chi\cdot z}\cdot\sum_{p=0}^{\infty}(2-\delta_{0p})\cdot i^p\cdot J_p(k\varrho\cdot\sin\chi)\cdot\cos p\varphi \qquad \begin{matrix}\delta_{pp}=1\\ \delta_{pq}=0\,(p\neq q)\end{matrix} \qquad (10.2).$$

Das hierin auftretende Produkt aus einer Exponential- und einer Besselschen Funktion gestattet jedoch seinerseits mit $z=\xi-\eta$ und $\varrho=2\cdot\sqrt{\xi\eta}$ die folgende Entwicklung [1] in eine Reihe von Produkten zweier Laguerre-Polynome:

$$\left.\begin{aligned}&e^{\pm ikz\cdot\cos\chi}\cdot J_p(k\varrho\cdot\sin\chi) = e^{\pm ikz}\cdot\left(\varrho k\cdot\operatorname{tg}\frac{\chi}{2}\right)^p\cdot\cos^{-2}(\chi/2)\\ &\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\operatorname{tg}^2\frac{\chi}{2}\right)^n\cdot\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+p+1)}\cdot L_n^{(p)}(\pm 2i\eta k)\,L_n^{(p)}(\mp 2i\xi k)\end{aligned}\right\}(|\operatorname{tg}\chi/2|<1) \qquad (10.3).$$

Setzt man hierin die durch die Gl. (1.12) definierte Wellenfunktion m ein, so entsteht in Rücksicht auf Gl. (10.2) für eine ebene Welle in den Koordinaten eines Rotationsparaboloides die Reihendarstellung (10.4). An Hand der Formeln des Abschnitts 8 kann man

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\xi,\eta,\varphi) &= \frac{2}{\pi\cdot\cos^2(\chi/2)}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}(-)^n\cdot\frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(p+1)^2}\cdot(2-\delta_{0p})\cdot(i\cdot\operatorname{tg}(\chi/2))^{2n+p}\\ &\times m^{(p)}_{n+\frac{p+1}{2}}(2i\eta k)\cdot m^{(p)}_{n+\frac{p+1}{2}}(-2i\xi k)\cdot\cos p\varphi\end{aligned}\right\} \qquad (10.4)$$

sich leicht davon überzeugen, daß die darin vorkommende Doppelreihe im Sinne der Konvergenz von Doppelreihen absolut konvergiert, solange $\operatorname{tg}(\chi/2)<1$ ist. Das Auftreten zweier m-Funktionen in (10.4) steht in Übereinstimmung mit der physikalischen Forderung, daß die Funktion Φ sowohl für $\xi=0$ als auch für $\eta=0$ endlich bleiben muß. Für manche Zwecke ist es vorteilhafter, statt der Doppelreihe in (10.4) ein Doppelintegral zu verwenden. Wir wollen jedoch auf die Durchführung dieser Umformung hier nicht näher eingehen.

An zweiter Stelle werde der andere wichtige Fall behandelt, daß das Erregungszentrum der Welle nicht wie bei der ebenen Welle im Unendlichen liegt, sondern daß es im Brennpunkt des Paraboloides angeordnet ist. Es kommt dann darauf an, den Ausdruck $e^{ikR}/R = e^{ik(\xi+\eta)}/(\xi+\eta)$ nach den Wellenfunktionen m und w des Rotationsparaboloides zu entwickeln. Die Gl. (10.3) legt es nahe, die Darstellung dieses Ausdrucks in leichter Verall-

$$S^{(p)}(\xi,\eta;h) = \sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(n+p+1)\cdot h^n\cdot w^{(p)}_{-n-\frac{p+1}{2}}(-2i\xi k)\cdot L_n^{(p)}(-2i\eta k) \quad . \; . \qquad (10.5)$$

gemeinerung durch die Reihe (10.5) zu versuchen, in der h ein zunächst willkürlicher Faktor mit $|h|<1$ ist. Die Vorzeichen der Funktionsargumente sind in (10.5) entsprechend der Gl. (1.13) gewählt worden.

Wir ersetzen in der obigen Reihe die Funktion w durch die Integraldarstellung (4.1b), nachdem zur Sicherung der Konvergenz der Integrationsweg vorher entsprechend geschwenkt worden ist. Die nach der Vertauschung der Reihenfolge von Summation und Integration unter dem Integralzeichen auftretende Reihe kann mittels der bekannten Formel (10.6) durch

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^n\cdot L_n^{(p)}(z) = (1-t)^{-(p+1)}\cdot e^{-z\cdot t/(1-t)} \qquad (|t|<1;\ z\ \text{bel.}) \quad . \; . \; . \qquad (10.6).$$

eine elementare Funktion summiert werden. Für die Summe $S^{(p)}$ von Gl. (10.5) entsteht damit die Darstellung (10.7) durch ein uneigentliches Integral, in dem voraussetzungsgemäß

$$S^{(p)}(\xi,\eta;h) = (\pi/2)^{1/2}\cdot\frac{(-2i\xi k)^{p/2}}{2^p\cdot(1+h)^{p+1}}\cdot\int_1^{\infty\cdot i} e^{i\cdot\xi k + i\cdot\eta k\cdot\frac{2h}{1+h}\cdot\frac{t-1}{1+t\left(\frac{1-h}{1+h}\right)}}\cdot\frac{(t^2-1)^p\cdot dt}{\left[1+\frac{1-h}{1+h}\cdot t\right]^{p+1}} \qquad (10.7)$$

immer noch $|h|<1$ anzunehmen ist. Für $h=1$ bleibt zwar das Integral konvergent. In Rücksicht auf die Konvergenz der Reihe muß dann aber $\xi>\eta$ sein. Überdies läßt sich für diesen speziellen Wert von h das Integral (10.7) durch die Hankelsche Funktion darstellen. Geht man des weiteren in Gl. (10.5) gemäß der Gl. (4.3) vom Laguerre-Polynom zur Wellenfunktion w über, so kommt für $h=1$ im ganzen die Beziehung zustande:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\cdot\frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(p+1)}\cdot w^{(p)}_{-n-\frac{p+1}{2}}(-2i\xi k)\cdot w^{(p)}_{n+\frac{p+1}{2}}(-2i\eta k)\\ &\qquad\qquad(\xi>\eta)\\ &=-\frac{1}{2}\cdot(\pi/2)^{3/2}\cdot\{(-2i\xi k)\cdot(-2i\eta k)\}^{p/2}\times\frac{H^{(1)}_{p+1/2}(k(\xi+\eta))}{[k(\xi+\eta)]^{p+1/2}}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(10.8).$$

Für $p=0$ wird also im besonderen

$$\frac{e^{ik(\xi+\eta)}}{k(\xi+\eta)}=\frac{e^{ikR}}{kR}=-\frac{4i}{\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\cdot w^{(0)}_{-n-\frac{1}{2}}(-2i\xi k)\cdot w^{(0)}_{n+\frac{1}{2}}(-2i\eta k)\quad(\xi>\eta\geqq 0)\quad(10.8\text{a}).$$

Ist in den beiden Entwicklungen (10.8) und (10.8a) $\xi<\eta$, so braucht lediglich in den beiden zugehörigen Reihen die Stellung der Argumente in den Funktionen vertauscht zu werden. Die der Reihendarstellung (10.8a) entsprechende Integraldarstellung (10.9), die aus der Reihe durch Anwendung des Residuensatzes hergeleitet werden kann, ist dieser insofern

$$\frac{e^{ik(\xi+\eta)}}{k(\xi+\eta)}=-4i\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}w^{(0)}_{-s}(-2i\xi k)\cdot w^{(0)}_{+s}(-2i\eta k)\cdot\frac{ds}{\cos\pi s}\quad\left(0<|\sigma|<\frac{1}{2};\ \xi,\eta>0\right)\quad(10.9)$$

überlegen, als sie sowohl für $\xi>\eta$ als auch für $\xi<\eta$ gültig ist. Bei der Herstellung des Integrals aus der Reihe leisten die Formeln (8.6a, b) gute Dienste, indem sie den strengen Nachweis dafür zu erbringen gestatten, daß der Integrand von (10.9) für $\xi>\eta$ auf dem rechten und für $\xi<\eta$ auf dem linken unendlich fernen Halbkreis der s-Ebene exponentiell verschwindet. Mit $m^{(0)}_{+s}$ an Stelle von $w^{(0)}_{+s}$ wäre das nicht der Fall.

Mit der Herleitung der bisher noch unbekannten Darstellung (10.9) für die primäre Wellenstrahlung eines Dipols in den Koordinaten eines Rotationsparaboloides ist im Verein mit den gleichfalls neuen Ergebnissen der Abschnitte 5, 6 und 9 über die Eigenfunktion eines solchen Paraboloides der entscheidende Schritt auf dem Wege zur Lösung praktisch wichtiger Strahlungsaufgaben getan.

11. Reihenentwicklungen nach den M-Funktionen und Integraldarstellungen für die Produkte von M- und W-Funktionen.

Um auch erkennen zu lassen, in welcher Richtung sich zur Zeit der weitere Ausbau der Theorie in rein mathematischer Hinsicht bewegt, mag zum Schluß noch auf eine Reihe von Arbeiten der jüngsten Zeit hingewiesen werden. Alle diese Arbeiten geben deutlich zu erkennen, wie stark befruchtend auch auf diesem Gebiet die feste Begründung der Theorie der Laplace-Transformierten gewirkt hat.

Zunächst hat A. Erdelyi [14] mit Hilfe dieser Theorie für die M-Funktion verschiedene Arten von Additions- und Multiplikationstheoremen bewiesen. In einer weiteren Arbeit [15] werden von ihm systematisch Reihen mit M-Funktionen untersucht, in denen entweder der erste oder der zweite oder auch beide Parameter zugleich von Glied zu Glied ansteigen. Diese Reihen entsprechen den bekannten Neumannschen Reihen erster Art in der Theorie der Zylinderfunktionen.

Ein wichtiges Beispiel für derartige Entwicklungen läßt sich auf sehr einfachem Wege aus der Gl. (3.5) herleiten, wenn man darin z durch $z\cdot\lambda^2$ ersetzt und für die dann rechts unter dem Integralzeichen auftretende Funktion $J_p(\lambda\cdot 2u\cdot z^{1/2})$ die von Lommel angegebene absolut konvergente Entwicklung (5.3) benutzt. Auf diese Weise entsteht die das Multiplikationstheorem der M-Funktion ausdrückende Beziehung (11.1).

$$\left.\begin{aligned}&M_{\nu,p/2}(z\cdot\lambda^2)=\lambda^{p+1}\cdot e^{z/2\cdot(\lambda^2-1)}\\ &\qquad\sum_{m=0}^{\infty}(-)^m\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma\left(\nu+m+\frac{p+1}{2}\right)}{m!\,\Gamma(p+1+m)\,\Gamma\left(\nu+\frac{p+1}{2}\right)}[(\lambda^2-1)\cdot z^{1/2}]^m\cdot M_{\nu+\frac{m}{2},\frac{p+m}{2}}(z)\end{aligned}\right\}\quad(11.1).$$

In zwei weiteren Arbeiten sind von dem gleichen Verfasser, und zwar auch hier auf der Grundlage der Transformiertentheorie, Integraldarstellungen für die Produkte zweier M- oder W-Funktionen hergeleitet worden. In der ersten dieser Arbeiten [16] beweist er z. B. die Beziehung (11.1), in der der Integrationsweg, der von $-\infty$ kommt und nach dorthin zu-

$$\left.\begin{aligned} M_{\nu,p/2}(z_1)\cdot M_{\mu,p/2}(z_2) &= (z_1\cdot z_2)^{\frac{p+1}{2}}\cdot\Gamma(p+1)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\left(\pm\frac{z_1+z_2}{2}+,\ \pm\frac{z_1-z_2}{2}+\right)} e^s\cdot\left(s-\frac{z_1-z_2}{2}\right)^{\nu-\frac{p+1}{2}}\cdot\left(s+\frac{z_1-z_2}{2}\right)^{\mu-\frac{p+1}{2}} \\ &\qquad |\operatorname{arc} s|<\pi \\ &\qquad |\operatorname{arc}(z_1,z_2)|<\pi \\ &\times\left(s+\frac{z_1+z_2}{2}\right)^{-\nu-\mu}\cdot{}_2F_1\left(\frac{p+1}{2}-\nu,\frac{p+1}{2}-\mu;p+1;\frac{z_1 z_2}{s^2-(z_1-z_2)^2/4}\right)\cdot \mathrm{d}s \end{aligned}\right\}\quad(11.2)$$

rückläuft, alle Singularitäten des Integranden in den Punkten $\pm(z_1+z_2)/2$ und $\pm(z_1-z_2)/2$ umläuft. In einer zweiten Arbeit [17] wird die entsprechende Beziehung für das Produkt zweier W-Funktionen abgeleitet. Sie lautet:

$$\left.\begin{aligned} W_{\nu,p/2}(z_1)\,W_{\mu,p/2}(z_2) &= (z_1 z_2)^{\frac{p+1}{2}}\cdot e^{-(z_1+z_2)/2}\cdot\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{2\pi i}\cdot\int\limits_{-\infty}^{(0+)} e^s\cdot(z_1-s)^{\nu-\frac{p+1}{2}}\cdot(z_2-s)^{\mu-\frac{p+1}{2}}\cdot s^{-\mu-\nu} \\ &\qquad |\operatorname{arc}(z_1,z_2)|<\pi,\ |\operatorname{arc} s|<\pi \\ &\qquad \nu+\mu\neq 0,-1,-2,\ldots \\ &\times{}_2F_1\left(\frac{p+1}{2}-\nu,\frac{p+1}{2}-\mu;1-\mu-\nu;-\frac{s\cdot(z_1+z_2-s)}{(z_1-s)(z_2-s)}\right)\cdot\mathrm{d}s \end{aligned}\right\}\quad(11.3).$$

Hier umkreist der Integrationsweg nur den Nullpunkt der s-Ebene. Ist $\Re(1-\mu-\nu)>0$, so läßt sich statt des Umlaufintegrals ein gewöhnliches Linienintegral verwenden, und man erhält

$$\left.\begin{aligned} W_{\nu,p/2}(z_1)\cdot W_{\mu,p/2}(z_2) &= \frac{(z_1 z_2)^{\frac{p+1}{2}}\cdot e^{-(z_1+z_2)/2}}{\Gamma(1-\mu-\nu)}\cdot\int\limits_0^\infty e^{-t}\cdot t^{-\mu-\nu}\cdot(z_1+t)^{\nu-\frac{p+1}{2}}\cdot(z_2+t)^{\mu-\frac{p+1}{2}} \\ &\qquad (z_1,z_2\neq 0) \\ &\qquad \Re(1-\mu-\nu)>0 \\ &\times{}_2F_1\left(\frac{p+1}{2}-\nu,\frac{p+1}{2}-\mu;1-\mu-\nu;\frac{t\cdot(z_1+z_2+t)}{(z_1+t)(z_2+t)}\right)\cdot\mathrm{d}t \end{aligned}\right\}\quad(11.3\text{a}).$$

Da in (10.8a) $\nu=-n-1/2$ und $\mu=+n+1/2$ ist und also in diesem Falle tatsächlich $1-\mu-\nu>0$ ist, so kann die Gl. (11.3a) dazu benutzt werden, auch von dieser Seite her die Richtigkeit der Gl. (10.8a) zu bestätigen. Für die angegebenen Werte von ν und μ ist nämlich die hypergeometrische Funktion in (11.3a) darstellbar durch die Kugelfunktion

$$P_n\left(-1+\frac{2z_1 z_2}{(z_1+t)(z_2+t)}\right).$$

Die in Gl. (10.8a) vorgeschriebene Summation nach n, die wegen der absoluten Konvergenz von Reihe und Integral auch unter dem Integralzeichen vorgenommen werden kann, wird dann auf Grund der bekannten Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-h)^n\cdot P_n(\eta)=(1+2\eta h+h^2)^{-1/2}\quad\text{mit}\quad |h|<1$$

ausführbar und führt damit unmittelbar zu dem früheren Ergebnis.

Wegen weiterer Arbeiten über Integraldarstellungen von Produkten Whittakerscher Funktionen, die zumeist auf anderer Grundlage als die der Transformiertentheorie gewonnen worden sind, vergleiche man die unter [18] und [19] genannten Abhandlungen von C. S. Meijer und W. N. Bailey.

12. Besondere M- und W-Funktionen.

Für besondere Werte der beiden Parameter ν und $p/2$ gehen die beiden konfluenten hypergeometrischen Funktionen in eine große Zahl bekannter Funktionen der angewandten Mathematik über. Wir bringen zum Schluß eine Zusammenstellung der wichtigsten dieser Funktionen. Es sind dies

1. die unvollständige Gammafunktion

$$Q(z,\nu)=\int\limits_z^\infty t^{\nu-1}\cdot e^{-t}\cdot\mathrm{d}t=z^{\frac{\nu-1}{2}}\cdot e^{-z/2}\cdot W_{\frac{\nu-1}{2},\frac{\nu}{2}}(z).$$

Damit sind zugleich erfaßt der Integrallogarithmus, der Integralsinus und der Integralcosinus.

2. die Fehlerfunktion

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_z^\infty e^{-t^2} \cdot \mathrm{d}\,t = (\pi z)^{-1/2} \cdot e^{-z^2/2} \cdot W_{-\frac{1}{4},\,+\frac{1}{4}}(z^2),$$

3. die Funktion des parabolischen Zylinders

$$D_\nu(z) = 2^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}} \cdot z^{-\frac{1}{2}} \cdot W_{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4},\,-\frac{1}{4}}(z^2/2),$$

4. die von Schlömilch studierte Funktion

$$S(\nu, z) = \int\limits_0^\infty e^{-zt} \cdot (1+t)^{-\nu} \cdot \mathrm{d}\,t = z^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot e^{z/2} \cdot W_{-\frac{\nu}{2},\,\frac{1-\nu}{2}}(z),$$

5. die Hankelsche Funktion

$$H_\nu^{(1)}(i\,z/2) = 2/\sqrt{\pi z} \cdot e^{-\frac{\pi i}{2}(\nu+1)} \cdot W_{0,\nu}(z) = \frac{2^{3/2}}{\pi} \cdot e^{-\pi i(\nu+1)/2} \cdot w_0^{(2\nu)}(z),$$

6. die Besselsche Funktion

$$J_\nu(i\,z/2) = \frac{e^{\pi i \nu/2}}{2^{2\nu} \cdot \Gamma(\nu+1) \cdot z^{1/2}} \cdot M_{0,\nu}(z) = \frac{e^{\pi i \nu/2}}{2^{2\nu-1/2} \cdot \Gamma(\nu+1) \cdot \pi^{1/2}} \cdot m_0^{(2\nu)}(z),$$

7. die k-Funktion von Bateman [21]

$$k_{2\nu}(z/2) = 1/\Gamma(\nu+1) \cdot W_{\nu,1/2}(z).$$

An Polynomen sind von der konfluenten hypergeometrischen Funktion ableitbar die schon im Text erwähnten Laguerre-Polynome und außerdem die Polynome von Hermite sowie die Weberschen Polynome des parabolischen Zylinders.

Schrifttumsverzeichnis.

[1] H. Bateman: The mathematical Analysis of electrical and optical Wavemotion, Cambridge 1915.

[2] Frank-v. Mises: Die Differentialgleichungen und Integralgleichungen der mathematischen Physik, 2. Aufl., Braunschweig 1930.

[3] Whittaker-Watson: A Course of modern Analysis, 4. Aufl., Cambridge 1927.

[4] G. N. Watson: Theory of Besselfunctions, Cambridge 1922.

[5] A. Sommerfeld: Atombau und Spektrallinien, Bd. II, 2. Aufl., Braunschweig 1939.

[6] C. S. Meijer: Einige Integraldarstellungen für Whittaker'sche und Bessel'sche Funktionen, Proc. Akad. Amsterdam, Bd. 37 (1934), S. 805 bis 812. Noch einige Integraldarstellungen für die Wh.-Funktion, ebenda Bd. 38 (1935), S. 528 bis 535. Einige Integraldarstellungen aus der Theorie der Bessel'schen und der Whittaker'schen Funktion, ebenda Bd. 39 (1936), S. 394 bis 403 und S. 519 bis 527. Über eine Integraldarstellung der Wh.-Funktion, ebenda Bd. 41 (1938) S. 42 bis 44. Beiträge zur Theorie der Wh.-Funktion, ebenda Bd. 41 (1938), S. 624 bis 633, S. 744 bis 745, S. 879 bis 888 und S. 1 096 bis 1 107. Neue Integraldarstellungen aus der Theorie der Wh.-Funktion und der Hankel'schen Funktion, Math. Ann. Bd. 112 (1935), S. 469 bis 489. Eine neue Erweiterung der Laplace-Transformation, Proc. Akad. Amsterdam, Bd. 44 (1941), S. 727 bis 737 und S. 831 bis 839.

[7] A. Erdelyi: Über eine Integraldarstellung der $M_{k,m}$-Funktion und ihre asymptotische Darstellung für große Werte von $\Re(k)$, Math. Ann., Bd. 113 (1936), S. 357 bis 361.

[8] A. Erdelyi: Über eine Integraldarstellung der $W_{k,m}$-Funktion und ihre Darstellung durch die Funktionen des parabolischen Zylinders, Math. Ann., Bd. 113 (1936), S. 347 bis 356.

[9] C. S. Meijer: Über die Integraldarstellungen der Whittaker'schen Funktion $W_{k,m}(z)$ und der Hankel'schen und Bessel'schen Funktion, Nieuw Archief (2) 18 (1936), S. 35 bis 57.

[10] O. Perron: Über das Verhalten einer ausgearteten hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines Parameters, J. reine angew. Math., Bd. 151 (1921), S. 63 bis 78.

[11] A. Erdelyi: Entwicklung von analytischen Funktionen nach $M_{k,m}$-Funktionen, Proc. Akad. Amsterdam, Bd. 39 (1936), S. 1092 bis 1099.

[12] G. H. Campbell and R. M. Foster: Fourier-Integrals for practical Applications. Bell System techn. Publications, Monograph B-584, 1931, Key 607.

[13] N. Nielsen: Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. Leipzig 1904.

[14] A. Erdelyi: Funktionalrelationen mit konfluenten hypergeometrischen Funktionen: Additions- und Multiplikationstheoreme, Math. Zeitschrift, Bd. 42 (1936), S. 125 bis 143.

[15] A. Erdelyi: Funktionalrelationen usw.: Reihenentwicklungen. Ebenda S. 641 bis 670.

[16] A. Erdelyi: Untersuchungen über Produkte von Wh.-Funktionen, Mh. Math. Phys., Bd. 46 (1937), S. 132 bis 156.

[17] A. Erdelyi: Integral Representations for Products of Wh.-Functions, Phil. Mag. (7) 26 (1938), S. 821 bis 877.

[18] C. S. Meijer: Einige Integraldarstellungen für Produkte von Wh.-Funktionen, Quart. J. Math., Oxford Ser., Bd. 6 (1935), S. 241 bis 248. Noch einige Integraldarstellungen für Produkte von Wh.-Funktionen, Proc. Akad. Amsterdam, Bd. 40 (1937), S. 871 bis 879. Note über das Produkt $M_{k,m}(z)\cdot M_{-k,m}(z)$. Ebenda Bd. 41 (1938), S. 275 bis 277.

[19] W. N. Bailey: An Integral Representation for the Product of two Wh.-Functions, Quart. J. Math., Oxford Ser., Bd. 8 (1937), S. 51 bis 53.

[20] J. L. Sharma: An Integral Equation for Whittaker's confluent hypergeometric Function, J. London Math. Soc., Bd. 13 (1938), S. 117 bis 119.

[21] H. Bateman: The k-function, a particular case of the confluent hypergeometric fonction, Trans. Amer. Math. Soc., Bd. 33 (1931), S. 817 bis 831.

Physikalische und technische Anwendungen der konfluenten hypergeometrischen Funktion sind zu finden

in Bd. II des unter [2] erwähnten Buches,

in dem unter [5] erwähnten Buch

und in den folgenden beiden Arbeiten

[22] R. Gran Olsson: Über die Knickung der Kreisringplatte von veränderlicher Dicke. Ing.-Arch., Bd. 12 (1941), S. 123 bis 137.

[23] H. Buchholz: Die Ausbreitung von Schallwellen in einem Horn von der Gestalt eines Rotationsparaboloides bei Anregung durch eine im Brennpunkt gelegene punktförmige Schallquelle, Ann. der Physik, Bd. 42 (1943), S. 423 bis 460.

435

KLEINE MITTEILUNGEN

Zur Ausgleichung des mehrfachen Vorwärtseinschneidens. Die Ausgleichung des mehrfachen Vorwärtseinschneidens kann man entweder nach vermittelnden oder nach bedingten Beobachtungen vornehmen. Die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen kommt praktisch nur dann in Frage, wenn nur eine Bedingungsgleichung auftritt, es sich also um ein dreifaches Vorwärtseinschneiden handelt[1]). Bei der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen treten zwei Unbekannte auf, wobei es bei der Wahl der Unbekannten verschiedene Möglichkeiten gibt. Am nächstliegendsten, ja fast selbstverständlich und auch üblich ist es, als Unbekannte die Koordinaten des zu bestimmenden Punkts zu wählen; es hat dies die Vorteile, daß man die mittleren Fehler der gesuchten Koordinaten ohne besondere Rechnung erhält, und daß die Fehlergleichungen alle dieselbe Form haben. Im folgenden soll der Fall behandelt werden, daß man als Unbekannte zwei, mit den gemessenen Richtungswinkeln zusammenhängende Winkel wählt. Bei der dabei sich ergebenden Lösung sind zwei Fehlergleichungen von Haus aus linear, während die anderen linear gemacht werden müssen. Die Lösung würde demnach praktisch insbesondere dann in Frage kommen, wenn es sich um ein dreifaches Vorwärtseinschneiden handelt, so daß man nur eine zunächst nicht lineare Fehlergleichung hat. Die zu lösende Aufgabe lautet folgendermaßen:

In den n Festpunkten $P_1, P_2 \ldots P_n$ mit den gegebenen und fehlerfrei anzunehmenden Koordinaten $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n)$, wurden zur Bestimmung der Koordinaten (ξ, η) eines Neupunkts P die Richtungswinkel $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ je gleich genau gemessen.

Wählt man als Unbekannte x und y die beiden Winkel $P_2 P_1 P$ und $P_1 P_2 P$, und bezeichnet man die an $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ anzubringenden Verbesserungen mit $v_1, v_2 \ldots v_n$, so lauten die beiden ersten Fehlergleichungen, wenn $(P_1 P_2)$ und $(P_2 P_1)$ die Richtungswinkel von $P_1 P_2$ bzw. $P_2 P_1$ sind, so:

$$(\varphi_1 + v_1) - (P_1 P_2) = x \quad \text{und} \quad (P_2 P_1) - (\varphi_2 + v_2) = y.$$

Führt man mit Rücksicht auf die anderen Fehlergleichungen für die Unbekannten x und y Näherungswerte x_0 und y_0 ein, und setzt man

$$x = x_0 + \Delta x \quad \text{und} \quad y = y_0 + \Delta y \quad \ldots \quad (1),$$

so gehen die beiden ersten Fehlergleichungen über in

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \Delta x + \{(P_1 P_2) - \varphi_1 + x_0\} \\ \text{und} \quad v_2 &= -\Delta y + \{(P_2 P_1) - \varphi_2 - y_0\} \end{aligned}\right\} \quad (2).$$

Die übrigen Fehlergleichungen sind zunächst von der Form

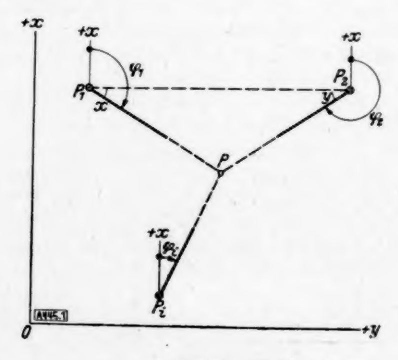


Bild 1.

[1]) Vgl. P. Werkmeister: Dreifaches Vorwärtseinschneiden mit Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen. Allg. Vermess.-Nachr. 55. Jahrgang (1943). Noch nicht erschienen.

$$\operatorname{tg}(\varphi_i + v_i) = \frac{\eta - y_i}{\xi - x_i}$$

oder mit Berücksichtigung der Unbekannten x und y

$$\operatorname{tg}(\varphi_i + v_i) = \\ = \frac{y_1 + P_1 P_2 \dfrac{\sin y}{\sin(x+y)} \sin\{(P_1 P_2) + x\} - y_i}{x_2 + P_1 P_2 \dfrac{\sin x}{\sin(x+y)} \cos\{(P_2 P_1) - y\} - x_i} = \\ = F(x, y).$$

Führt man die Näherungswerte x_0 und y_0 ein, so erhält man

$$\operatorname{tg}(\varphi_i + v_i) = \frac{y_1 + P_1 P_2 \dfrac{\sin(y_0 + \Delta y)}{\sin\{(x_0 + \Delta x) + (y_0 + \Delta y)\}}}{x_2 + P_1 P_2 \dfrac{\sin(x_0 + \Delta x)}{\sin\{(x_0 + \Delta x) + (y_0 + \Delta y)\}}}$$

$$\frac{\sin\{(P_1 P_2) + (x_0 + \Delta x)\} - y_i}{\cos\{(P_2 P_1) - (y_0 + \Delta y)\} - x_i} = F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y).$$

Wendet man auf diese Gleichung den Satz von Taylor an und bezeichnet man die x_0 und y_0 entsprechenden Werte von ξ und η mit ξ_0 und η_0, so findet man bei Vernachlässigung der Glieder zweiter und höherer Ordnung

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi_i + \frac{1}{\cos^2\varphi_i}\frac{v_i}{\varrho} &= F(x_0, y_0) \\ &+ \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}\frac{\Delta x}{\varrho} + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\frac{\Delta y}{\varrho} \end{aligned}\right\} \qquad (3),$$

wobei

$$F(x_0, y_0) = \\ \frac{y_1 + P_1 P_2 \dfrac{\sin y_0 \sin\{(P_1 P_2) + x_0\}}{\sin(x_0 + y_0)} - y_i}{x_2 + P_1 P_2 \dfrac{\sin x_0 \cos\{(P_2 P_1) - y_0\}}{\sin(x_0 + y_0)} - x_i} = \frac{\eta_0 - y_i}{\xi_0 - x_i},$$

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} = \\ \frac{P_1 P_2 \dfrac{\sin y_0 \sin\{(P_2 P_1) - y_0\}}{\sin^2(x_0 + y_0)}(\xi_0 - x_i) - (\eta_0 - y_i) P_1 P_2 \dfrac{\sin y_0 \cos\{(P_2 P_1) - y_0\}}{\sin^2(x_0 + y_0)}}{(\xi_0 - x_i)^2}$$

und

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} = \\ \frac{P_1 P_2 \dfrac{\sin x_0 \sin\{(P_1 P_2) + x_0\}}{\sin^2(x_0 + y_0)}(\xi_0 - x_i) - (\eta_0 - y_i) P_1 P_2 \dfrac{\sin x_0 \cos\{(P_1 P_2) + x_0\}}{\sin^2(x_0 + y_0)}}{(\xi_0 - x_i)^2}$$

Bezeichnet man im Gegensatz zu den „gemessenen Richtungswinkeln" φ_1, φ_2 und φ_i die dem Näherungspunkt P_0 mit den Koordinaten (ξ_0, η_0) entsprechenden „genäherten Richtungswinkel" mit $\varphi_{0,1}$, $\varphi_{0,2}$ und $\varphi_{0,i}$, und beachtet man, daß

$$\xi_0 - x_i = P_i P_0 \cos\varphi_{0,i}, \qquad \eta_0 - y_i = P_i P_0 \sin\varphi_{0,i},$$

$$\frac{\eta_0 - y_i}{\xi_0 - x_i} = \operatorname{tg}\varphi_{0,i},$$

$$P_1 P_2 \frac{\sin y_0}{\sin(x_0 + y_0)} = P_1 P_0$$

und

$$P_1 P_2 \frac{\sin x_0}{\sin(x_0 + y_0)} = P_2 P_0,$$

so erhält man

$$F(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\varphi_{0,i},$$

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} = P_1 P_0 \frac{(\xi_0 - x_i)\sin\varphi_{0,2} - (\eta_0 - y_i)\cos\varphi_{0,2}}{P_i P_0^2 \cos^2\varphi_{0,i}\sin(x_0 + y_0)}$$

und

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} = P_2 P_0 \frac{(\xi_0 - x_i)\sin\varphi_{0,i} - (\eta_0 - y_i)\cos\varphi_{0,i}}{P_i P_0^2 \cos^2\varphi_{0,i}\sin(x_0 + y_0)}$$

Da

$$\operatorname{tg}\varphi_{0,i} - \operatorname{tg}\varphi_i = \\ = \frac{\sin(\varphi_{0,i} - \varphi_i)}{\cos\varphi_{0,i}\cos\varphi_i} \approx \frac{\varphi_{0,i} - \varphi_i}{\varrho}\frac{1}{\cos\varphi_{0,i}\cos\varphi_i}$$

und $\varphi_{0,i} \approx \varphi_i$ ist, so findet man an Hand der Gl. (3) für die zuerst nicht linearen Fehlergleichungen die lineare Form

$$v_i = a_i \Delta x + b_i \Delta y + \{\varphi_{0,i} - \varphi_i\} \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

wobei

$$a_i = \frac{P_1 P_0}{P_i P_0^2}\frac{(\xi_0 - x_i)\sin\varphi_2 - (\eta_0 - y_i)\cos\varphi_2}{\sin(x_0 + y_0)}$$

und

$$b_i = \frac{P_2 P_0}{P_i P_0^2}\frac{(\xi_0 - x_i)\sin\varphi_1 - (\eta_0 - y_i)\cos\varphi_1}{\sin(x_0 + y_0)}.$$

Die Näherungswerte x_0 und y_0 wählt man derart, daß in den beiden, von Haus aus linearen Fehlergleichungen (2) die Absolutglieder je gleich null sind, womit bei der Aufstellung der Normalgleichungen eine kleine Vereinfachung entsteht.

Nach Berechnung der Koeffizienten a_i und b_i der Fehlergleichungen (4) kann man mit diesen und den Fehlergleichungen (2) in der üblichen Weise die Normalgleichungen aufstellen und damit Δx und Δy bestimmen. Nach Berechnung von x und y an Hand der Gl. (1) erhält man die Koordinaten (ξ, η) des Neupunkts P aus

$$\xi = x_1 + P_1 P_2 \frac{\sin y}{\sin(x+y)} \cos\{(P_1 P_2) + x\}$$

und

$$\eta = y_1 + P_1 P_2 \frac{\sin y}{\sin(x+y)} \sin\{(P_1 P_2) + x\}$$

Nach Berechnung des mittleren Fehlers μ eines der gemessenen Richtungswinkel $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ aus

$$\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}},$$

wobei man $[vv]$ in der bekannten Weise zur Probe doppelt — einerseits im Zusammenhang mit den Normalgleichungen und andererseits unmittelbar mit den v-Werten — bestimmt, kann man auch die mittleren Fehler μ_ξ und μ_η von ξ und η berechnen. Sind $\Delta\xi_1$ und $\Delta\eta_1$ die durch eine Veränderung von φ_1 allein um μ, $\Delta\xi_2$ und $\Delta\eta_2$ die durch eine Veränderung von φ_2 allein um μ, sowie $\Delta\xi_n$ die durch eine Veränderung von φ_n allein um μ je getrennt an ξ und η hervorgerufenen Veränderungen, so ist nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\mu_\xi = \sqrt{\Delta\xi_1^2 + \Delta\xi_2^2 + \cdots + \Delta\xi_n^2}$$

und

$$\mu_\eta = \sqrt{\Delta\eta_1^2 + \Delta\eta_2^2 + \cdots + \Delta\eta_n^2}.$$

Dabei sind die „Teilfehler“ oder „Einzelfehler“

$$(\Delta\xi_1, \Delta\eta_1), (\Delta\xi_2, \Delta\eta_2) \cdots (\Delta\xi_n, \Delta\eta_n)$$

die Koordinatenunterschiede zwischen den durch $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_n$ bestimmten Koordinaten (ξ, η) von P und den durch $(\varphi_1 \pm \mu, \varphi_2 \cdots \varphi_n)$, $(\varphi_1, \varphi_2 \pm \mu \cdots \varphi_n) \cdots (\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_n \pm \mu)$ bestimmten Koordinaten $(\xi', \eta'), (\xi'', \eta'') \cdots (\xi^n, \eta^n)$ von n Punkten $P', P'' \cdots P^n$. Die Bestimmung dieser Koordinaten geschieht in derselben Weise wie die von (ξ, η), wobei verschiedene Vereinfachungen bei der Zahlenrechnung — z. B. durch Verwendung der Tafeldifferenzen — sich ergeben. Wählt man bei der Bestimmung der verschiedenen Δx- und Δy-Werten die Näherungswerte x_0 und y_0 jeweils so, daß — wie oben angedeutet — die Absolutglieder der Fehlergleichungen (2) je gleich null sind, so entsteht dadurch bei den Normalgleichungen insofern eine Vereinfachung, als alle die neuen Normalgleichungen von den ursprünglichen sich nur in den Absolutgliedern unterscheiden. Bei der Aufstellung und der Auflösung der verschiedenen Systeme von Normalgleichungen wird weitgehendst vom Rechenschieber Gebrauch gemacht.

Der Gang der Rechnung soll an dem folgenden Zahlenbeispiel gezeigt werden:

Gegeben sind die Koordinaten

Punkt	x m	y m
P_1	— 20 664,34	+ 15 054,58
P_2	— 22 013,02	+ 12 934,92
P_3	— 20 874,55	+ 11 392,02 .

Gemessen wurden in P_1, P_2 und P_3 je gleich genau die drei Richtungswinkel

$$\varphi_1 = 253^\circ\, 00'\, 50'', \quad \varphi_2 = 31^\circ\, 32'\, 00''$$

und $\varphi_3 = 97^\circ\, 34'\, 17''$.

Wählt man zur Bestimmung von (ξ, η)

$$x_0 = \varphi_1 - (P_1 P_2) = 15^\circ\, 28'\, 52'',8$$

und

$$y_0 = (P_2 P_1) - \varphi_2 = 25^\circ\, 59'\, 57'',2,$$

so erhält man die drei linearen Fehlergleichungen

$$v_1 = \Delta y \quad \cdot \quad \cdot$$
$$v_2 = \quad \cdot \quad -\Delta y \quad \cdot$$
$$v_3 = -1{,}097\,\Delta x + 0{,}304\,\Delta y + 6'',2 .$$

Damit ergeben sich in der üblichen Weise die Werte

$\Delta x = +3'',0$ und $\Delta y = -0'',8$,

$x = 15^\circ\, 28'\, 55'',8$ und $y = 25^\circ\, 59'\, 26'',4$,

sowie

$\xi = -21\,150{,}045$ m und $\eta = +13\,464{,}448$ m

Der mittlere Fehler μ eines der drei gleich genau gemessenen Richtungswinkel ist $\mu = \pm 4'',1$. Mit

$$\varphi_1 + \mu = 253^\circ\, 00'\, 54'',1, \quad \varphi_2 = 31^\circ\, 32'\, 00''$$

und $\varphi_3 = 97^\circ\, 34'\, 17''$

erhält man mit

$$x_0 = 15^\circ\, 28'\, 56'',9 \quad \text{und} \quad y_0 = 25^\circ\, 59'\, 57'',2$$
$$v_1 = \Delta x \quad \cdot \quad \cdot$$
$$v_2 = \quad \cdot \quad -\Delta y \quad \cdot$$
$$v_3 = -1{,}097\,\Delta x + 0{,}304\,\Delta y + 1'',8$$

$\Delta x = +0'',9$ $\Delta y = -0'',2$

$x = 15^\circ\, 29'\, 57'',8$ $y = 25^\circ\, 59'\, 57'',0$

$\xi' = -21\,150{,}027$ m $\eta' = +13\,464{,}455$ m

$\Delta\xi_1 = 1{,}8$ cm $\Delta\eta_1 = 0{,}7$ cm.

Mit $\varphi_1 = 253^\circ\, 00'\, 50''$, $\varphi_2 + v_2 = 31^\circ\, 32'\, 04'',1$

und $\varphi_3 = 97^\circ\, 34'\, 17''$

erhält man mit

$$x_0 = 15^\circ\, 28'\, 52'',8 \quad \text{und} \quad y_0 = 25^\circ\, 59'\, 53'',1$$
$$v_1 = \Delta x \quad \cdot \quad \cdot$$
$$v_2 = \quad \cdot \quad -\Delta y \quad \cdot$$
$$v_3 = -1{,}097\,\Delta x + 0{,}304\,\Delta y + 5'',0$$

$\Delta x = +2'',4$ $\Delta y = -0'',7$

$x = 15^\circ\, 28'\, 55'',2$ $y = 25^\circ\, 59'\, 52'',4$

$\xi'' = -21\,150{,}044$ m $\eta'' = +13\,464{,}469$ m

$\Delta\xi_2 = 0{,}1$ cm $\Delta\eta_2 = 2{,}1$ cm.

Mit $\varphi_1 = 253^\circ\, 00'\, 50''$, $\varphi_2 = 31^\circ\, 32'\, 00''$

$\varphi_3 + \mu = 97^\circ\, 34'\, 21'',1$

erhält man mit

$$x_0 = 15^\circ\, 28'\, 52'',8 \quad \text{und} \quad y_0 = 25^\circ\, 59'\, 57'',2$$
$$v_1 = \Delta x \quad \cdot \quad \cdot$$
$$v_2 = \quad \cdot \quad -\Delta y \quad \cdot$$
$$v_3 = -1{,}097\,\Delta x + 0{,}304\,\Delta y + 2'',1$$

$\Delta x = +1'',0$ $\Delta y = -0'',2$

$x = 15^\circ\, 28'\, 53'',8$ $y = 25^\circ\, 59'\, 57'',0$

$\xi''' = -21\,150{,}068$ m $\eta''' = +13\,464{,}430$ m

$\Delta\xi_3 = 2{,}3$ cm $\Delta\eta_3 = 1{,}8$ cm.

Mit den vorstehenden Werten für $(\Delta\xi_1, \Delta\eta_1)$, $(\Delta\xi_2, \Delta\eta_2)$ und $(\Delta\xi_3, \Delta\eta_3)$ findet man

$$\mu_\xi = \pm 2{,}9 \text{ cm und } \mu_\eta = \pm 2{,}9 \text{ cm}.$$

Führt man die Ausgleichung mit den Koordinaten des Neupunkts P als Unbekannte in der üblichen Weise durch, so findet man

$$\xi = -21\,150{,}046 \pm 0{,}029 \text{ m}$$

und

$$\eta = +15\,464{,}447 \pm 0{,}030 \text{ m},$$

also praktisch dieselben Werte.

Stuttgart. P. Werkmeister. 445

Eine Vereinfachung bei der numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. In dem soeben erschienenen Buche „Praxis der Differentialgleichungen“ von H. v. Sanden (Berlin 1943) werden auf Seite 18 ff. und 45 ff. numerisch-tabellarische Integrationsverfahren für Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung beschrieben.

Es soll hier gezeigt werden, wie sich die Rechnung noch wesentlich vereinfachen und abkürzen läßt. Die Bezeichnungen sind dabei die gleichen wie in dem genannten Buch.

Bei der Integration einer Gleichung erster Ordnung und Systemen von Gleichungen erster Ordnung sei die Rechnung bis zum Tabellenwert x_k fortgeschritten, so daß der Funktionswert y_k, sowie f_k und die Differenzen $\Delta_k^1, \Delta_k^2, \cdots \Delta_k^p$ bekannt sind. Dabei bedeutet p die Ordnung der Ersatzfunktion bei der Integration; den sog. Annäherungsgrad.

Die erste Näherung für den folgenden Funktionswert, $y^{(1)}_{k+1}$, erhält man durch die auf Seite 23 angegebene Formel I:

$$\left.\begin{aligned} y^{(1)}_{k+1} &= y_k + h \\ &\cdot [a_0 \cdot f_k + a_1 \cdot \Delta^1_k + a_2 \cdot \Delta^2_k + \cdots + a_p \cdot \Delta^p_k] \end{aligned}\right\} \quad . \quad (1).$$

Die Beiwerte $a_0, a_1; a_2, \cdots\cdots a_p$ sind die Integrale

$$a_i = \int_0^1 \frac{u(u+1)(u+2)\cdots(u+i-1)}{i!}\,\mathrm{d}u \quad . \quad (2).$$

$$(i = 1; 2; \cdots\, p) \qquad (a_0 = 1)$$

Mit $y^{(1)}_{k+1}$ wird f^1_{k+1} berechnet, wodurch die Differenzen

$$\Delta^1_{k+1}; \quad \Delta^2_{k+1}; \quad \cdots$$

bestimmt sind. Der zweite Näherungswert y^2_{k+1} soll nach der Formel II (Seite 23) berechnet werden, d. h.

$$\left.\begin{aligned} y^{(2)}_{k+1} &= y_k + h \cdot [b_0 \cdot f^1_{k+1} + b_1 \cdot \Delta^1_{k+1} \\ &\quad + b_2 \cdot \Delta^2_{k+1} + \cdots b_p \cdot \Delta^p_{k+1}] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (3)$$

mit

$$b_i = \int_{-1}^0 \frac{u(u+1)(u+2)\cdots(u+i-1)}{i!}\,\mathrm{d}u \quad . \quad (4).$$

$$(i = 1; 2; \cdots\, p) \qquad (b_0 = 1)$$

Diese Summation (3) kann vermieden werden. Man erhält einfacher

$$y^{(2)}_{k+1} - y^{(1)}_{k+1} = h \cdot a_p \cdot \Delta^{p+1}_{k+1};$$

also sofort die an der ersten Näherung anzubringende Korrektur. Die Differenzen $(p+1)$ ter Ordnung führt man ohnehin der Kontrolle wegen in der Rechnung mit. Diese Korrektur läßt sich fast immer mit dem Rechenschieber, sehr oft im Kopf berechnen, so daß die Zeitersparnis gegenüber der Summation erheblich ist.

Der Beweis für die Richtigkeit der neuen Formel ist folgender:

Aus (1) und (3) folgt

$$\left.\begin{aligned} y^{(2)}_{k+1} - y^{(1)}_{k+1} = h \cdot \big[& b_0 \cdot f^1_{k+1} + b_1 \cdot \Delta^1_{k+1} \\ & + b_2 \cdot \Delta^2_{k+1} + \cdots + b_p \cdot \Delta^p_{k+1} \\ & - a_0 \cdot f_k - a_1 \cdot \Delta^1_k - a_2 \cdot \Delta^2_k - \cdots \\ & - a_p \cdot \Delta^p_k \big] \end{aligned}\right\} \quad (5).$$

Nun bestehen in der Bezeichnisweise des Buches die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Delta^1_{k+1} &= f^1_{k+1} - f_k \\ \Delta^2_{k+1} &= \Delta^1_{k+1} - \Delta^1_k = f^1_{k+1} - f_k - \Delta^1_k \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta^p_{k+1} &= \Delta^{p-1}_{k+1} - \Delta^{p-1}_k = f^1_{k+1} - f_k - \Delta^1_k \\ &\qquad - \Delta^2_k - \cdots - \Delta^{p-1}_k \\ \Delta^{p+1}_{k+1} &= \Delta^p_{k+1} - \Delta^p_k = f^1_{k+1} - f_k - \Delta^1_k - \Delta^2_k \\ &\qquad - \cdots - \Delta^p_k \end{aligned}\right\} \quad (6).$$

Setzt man dies in (5) ein, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y^{(2)}_{k+1} - y^{(1)}_{k+1}}{h} \\ &= f^1_{k+1} \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_p) \\ &- f_k \quad \cdot (a_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_p) \\ &- \Delta^1_k \quad \cdot (\quad a_1 + b_2 + \cdots + b_p) \\ &- \Delta^2_k \quad \cdot (\quad a_2 + b_3 + \cdots + b_p) \\ &- \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &- \Delta^{p-1}_k \cdot (\quad a_{p-1} + b_p) \\ &- \Delta^p_k \quad \cdot (\quad a_p) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (7).$$

Die Klammern in dieser Gleichung sind nun alle gleich a_p.

Es ist nämlich nach (2)

$$\left.\begin{aligned} &a_p - a_{p-1} = \\ &\int_0^1 \frac{u(u+1)(u+2)\cdots(u+p-2)(u-1)}{(p-1)!\,p}\,\mathrm{d}u \end{aligned}\right\} \quad . \quad (8).$$

Mit einer neuen Integrationsvariabelen $z = u - 1$ wird daher nach (4)

$$a_p - a_{p-1} = \int_{-1}^0 \frac{z(z+1)\cdots(z+p-1)}{p!}\,\mathrm{d}z = b_p \quad (9).$$

Es ist daher auch

$$\left.\begin{aligned} a_{p-1} &= a_{p-2} + b_{p-1} \\ a_{p-2} &= a_{p-3} + b_{p-2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

usw. und

$$\begin{aligned} a_p &= a_{p-1} + b_p = a_{p-2} + b_{p-1} + b_p \\ &= a_{p-3} + b_{p-2} + b_{p-1} + b_p = \cdots. \end{aligned}$$

Setzt man dies in (7) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} &\frac{y^{(2)}_{k+1} - y^{(1)}_{k+1}}{h} \\ &= \left[f^1_{k+1} - \left(f_k + \Delta^1_k + \Delta^2_k + \cdots + \Delta^p_k \right) \right] \cdot a_p. \end{aligned}$$

Nach (6) ist die eckige Klammer gleich Δ^{p+1}_{k+1}, so daß in der Tat

$$y^{(2)}_{k+1} - y^{(1)}_{k+1} = h \cdot a_p \cdot \Delta^{p+1}_{k+1} \text{ ist.}$$

Rechnet man z. B. mit $p = 2$, so gilt die Formel

$$y^{(2)}_{k+1} - y^{(1)}_{k+1} = \frac{5}{12} \cdot h \cdot \Delta^3_{k+1}.$$

Oder mit $p = 4$:

$$y^{(2)}_{k+1} - y^{(1)}_{k+1} = \frac{251}{720} \cdot h \cdot \Delta^5_{k+1}.$$

Die letzte der Gleichungen (6) enthält noch eine willkommene Kontrolle der aus f^1_{k+1} neu gewonnenen Differenzen $\Delta^1_{k+1}; \Delta^2_{k+1}; \cdots \Delta^{p+1}_{k+1}$, bei deren Bildung erfahrungsgemäß leicht Rechenfehler vorkommen.

Mit

$$\Delta^{p+1}_{k+1} = f^1_{k+1} - \left(f_k + \Delta^1_k + \Delta^2_k + \cdots + \Delta^p_k \right)$$

werden alle Differenzen Δ_{k+1} kontrolliert. —

Diese Gleichung zeigt, daß man die Differenzen Δ_{k+1} aus $y^{(1)}_{k+1}$ und f^{1}_{k+1} gar nicht zu bilden braucht, sondern unmittelbar

$$y^{(2)}_{k+1} - y^{(1)}_{k+1} = h \cdot \left[f^{1}_{k+1} - \left(f_k + \Delta^{1}_{k} + \cdots + \Delta^{p}_{k}\right)\right]$$

berechnen kann. Die Differenzen Δ_{k+1} sind erst dann zu bilden, wenn die Iteration beendet ist. Ist y^{ϱ}_{k+1} der endgültige Wert, so werden die Differenzen Δ_{k+1} aus dem zugehörigen f^{ϱ}_{k+1} berechnet, und durch

$$\Delta^{p+1}_{k+1} = f^{\varrho}_{k+1} - \left(f_k + \Delta^{1}_{k} + \Delta^{2}_{k} + \cdots + \Delta^{p}_{k}\right)$$

kontrolliert. Trotzdem wird man die Differenzen Δ_{k+1} bereits mit $y^{(1)}_{k+1}$ bilden und

$$y^{(2)}_{k+1} = y^{(1)}_{k+1} + h \cdot a_p \cdot \Delta^{p+1}_{k+1}$$

rechnen, weil man aus den Differenzen eine Einsicht in den Verlauf der Lösung und die Brauchbarkeit des gewählten Tabellenintervalls h gewinnt.

Bei der Integration von Systemen gekoppelter Gleichungen kommt es zudem vor, daß bei einigen Gleichungen keine Iteration mehr nötig ist, so daß bereits $y^{(1)}_{k+1}$ der endgültige Wert bleibt.

Die weiteren Iterationen werden nach der Formel III des Buches ebenso einfach gewonnen. Der darin auftretende Zahlfaktor ist auch a_p, wie man aus den vorstehenden Gleichungen (6) durch Ausrechnen der Differenz $y^{\varrho+1}_{k+1} - y^{\varrho}_{k+1}$ leicht nachweisen kann. Die Formel III läßt sich also allgemein schreiben

$$y^{\varrho+1}_{k+1} = y^{\varrho}_{k+1} + h \cdot a_p \cdot \varphi_{\varrho-1;\,\varrho}\,.$$

Ganz ähnliche Überlegungen gelten für die erste Iteration bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung. (Vgl. S. 45 u. 46 des Sandenschen Buches).

Es wird hier.

$$\left.\begin{aligned} & y^{(2)}_{k+1} - y^{(1)}_{k+1} = \\ & h^2\left[A_0 f_k + A_1\,\Delta^{1}_{k} + \cdots A_p\,\Delta^{p}_{k} - \right. \\ & \left. - B_0\,f^{1}_{k+1} - B_1\,\Delta^{1}_{k+1} \cdots - B_p\,\Delta^{p}_{k+1}\right] \end{aligned}\right\} \quad (11).$$

Die Koeffizienten A_i und B_i sind:

$$\left.\begin{aligned} & A_i = \\ & \int_0^1 \left[\int_0^u \frac{u(u+1)(u+2)\cdots(u+i-1)}{i!}\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}u \\ & \text{und} \\ & B_i = \\ & \int_{-1}^0 \left[\int_{-1}^u \frac{u(u+1)(u+2)\cdots(u+i-1)}{i!}\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}u \end{aligned}\right\} \quad (12).$$

Mit Anwendung der Gl. (6) bekommt man

$$\left.\begin{aligned} & \frac{y^{(2)}_{k+1} - y^{(1)}_{k+1}}{h^2} = \\ & \quad f^{1}_{k+1}\cdot(B_0 + B_1 + B_2 + \cdots + B_p) \\ & \quad - f_k \cdot (A_0 + B_1 + \qquad \cdots + B_p) \\ & \quad - \Delta^{1}_{k}\cdot(\quad A_1 + B_2 + \cdots + B_p) \\ & \quad - - - - - - - - - - - - - \\ & \quad - \Delta^{p-1}_{k}\cdot(A_{p-1} + B_p) \\ & \quad - \Delta^{p}_{k}\cdot(A_p) \end{aligned}\right\} \quad (13).$$

Wiederum ist:

$$\left.\begin{aligned} & A_p - A_{p-1} = \\ & \int_0^1 \left[\int_0^u \frac{u(u+1)\cdots(u+p-1)}{p!}\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}u \\ & - \int_0^1 \left[\int_0^u \frac{u(u+1)\cdots(u+p-2)}{(p-1)!}\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}u \\ & = \int_0^1 \left[\int_0^u \frac{u(u+1)\cdots(u+p-2)(u-1)}{p!}\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}u \\ & = \int_{-1}^0 \left[\int_{-1}^z \frac{z(z+1)\cdots(z+p-1)}{p!}\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}z = B_p \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

und mit (11) wird dann

$$\left.\begin{aligned} y^{(2)}_{k+1} & = y^{(1)}_{k+1} + h^2 \cdot A_p \\ & \quad \left[f^{1}_{k+1} - \left(f_k + \Delta^{1}_{k} + \Delta^{2}_{k} + \cdots \Delta^{p}_{k}\right)\right] \\ & = y^{(1)}_{k+1} + h^2 \cdot A_p \cdot \Delta^{p+1}_{k+1} \end{aligned}\right\} \quad (15),$$

wobei man

$$\Delta^{p+1}_{k+1} = f^{1}_{k+1} - f_k - \Delta^{1}_{k} - \Delta^{2}_{k} \cdots - \Delta^{p}_{k}$$

als Kontrolle benutzt.

Wenn man z. B. mit $p = 2$ rechnet, ist

$$y^{(2)}_{k+1} = y^{(1)}_{k+1} + h^2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \Delta^{3}_{k+1} \quad . \;.\; . \quad (20\,\mathrm{a})$$

und entsprechend bei $p = 4$

$$y^{(2)}_{k+1} = y^{(1)}_{k+1} + h^2 \cdot \frac{135}{1440}\,\Delta^{5}_{k+1} \quad . \;.\; . \quad (20\,\mathrm{b}).$$

Hannover. Karl Stohler. 453

Eine vom Vorhaltschießen abgeleitete Interpretation einer Näherungslösung der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung I. Ordnung. Im Band 22 (1942), Heft 3, S. 143—152 dieser Zeitschrift habe ich eine Näherungslösung für die Differentialgleichung

$$y(x) + \lambda(x) \cdot y(x) = f(x) \quad . \;.\; . \quad (1)$$

angegeben. Sie hat die Gestalt

$$u = f(x + \mu(x)) \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (2),$$

wobei $\mu(x)$ aus der Funktionalgleichung

$$\lambda(x + \mu) + \mu = 0 \quad . \;.\; . \;.\; . \;. \quad (3)$$

für einen gewissen Teil des Definitionsintervalls von $\lambda(x)$ eindeutig zu berechnen ist, wenn $\lambda(x)$ stetig und stetig differenzierbar, $\lambda'(x) \neq -1$ sowie $|\lambda(x)|$ hinreichend klein ist. (Vgl. auch den auf S. 148 stehenden Koppelungssatz und den auf S. 149 befindlichen Phasenverschiebungssatz 1. Art der oben zitierten Arbeit.)

Diese Näherungslösung läßt sich unter gewissen Voraussetzungen über $f(x)$ und $\lambda(x)$ auf anschauliche Weise interpretieren, wenn man die Theorie des Vorhaltschießens zu Hilfe nimmt. Dies sei, wie folgt, näher erläutert.

In Bild 1 stellt B eine Batterie dar, die ein in der Ebene $B\,A\,T$ längs einer Bahn b sich bewegendes Ziel beschießen soll. Dabei darf im allgemeinen ein Geschütz aber nicht auf denjenigen Punkt gerichtet werden, in welchem sich das Ziel im Augenblick des Abschusses befindet (Abschuß-

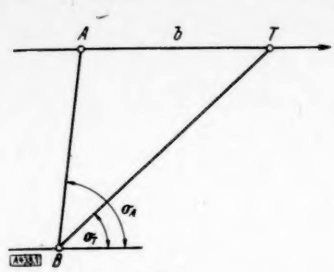


Bild 1.

punkt), sondern auf einen solchen Punkt der Zielbahn, der erst nach einer bestimmten Zeit vom Ziel eingenommen wird (Treffpunkt). Stellt man sich unter A den Abschußpunkt, unter T den Treffpunkt vor, so muß der Punkt T der Forderung genügen, daß die Geschoßflugzeit T_T, die das Geschoß zum Zurücklegen des Weges BT benötigt, zugleich auch die Zeit ist, in welcher das Ziel von A nach T gelangt.

Wir bezeichnen die Uhrzeit des Abschusses mit x und setzen

$$T_T = \lambda(x).$$

Die Geschoßflugzeit, die ein Geschoß für den Weg zwischen Batterie und Abschußpunkt benötigen würde, bezeichnen wir mit T_A und setzen

$$T_A = -\mu(x).$$

Nun können wir den Abschußpunkt A seinerseits als Treffpunkt auffassen, der zum Zeitpunkt x getroffen wird. Damit dies der Fall ist, müßte das Geschoß zum früheren Zeitpunkt $x - T_A = \mu(x) + x$ abgefeuert werden.

Somit gilt

$$\lambda[x + \mu(x)] = T_A = -\mu(x)\,{}^{1)}$$

oder

$$\lambda[x + \mu(x)] + \mu(x) = 0.$$

Dies aber ist dieselbe Funktionalgleichung (3), auf welcher die eingangs genannte Näherungslösung beruht.

Somit können wir den Koeffizienten $\lambda(x)$ der Differentialgleichung (1) als Geschoßflugzeit zum Treffpunkt, die daraus abgeleitete Funktion $-\mu(x)$ als Geschoßflugzeit zum Abschußpunkt interpretieren.

Zur Interpretation der Näherungslösung

$$u = f(x + \mu)$$

führen wir irgendeine Ortskoordinate des Zieles, beispielweise seinen Seitenwinkel ein, bezeichnen denselben für den Treffpunkt mit σ_T, für den Abschußpunkt mit σ_A und beziehen beide Winkel auf den Zeitpunkt x des Abschusses.

Wir setzen

$$\sigma_T = f(x).$$

Beachten wir jetzt wieder, daß auch der Abschußpunkt als ein der Abschußzeit $x + \mu(x)$ zugeordneter Treffpunkt aufgefaßt werden kann, so gilt

$$u(x) = f[x + \mu(x)] = \sigma_A.$$

Demnach können wir die Störfunktion $f(x)$ als Ortskoordinate des Treffpunktes, die Näherungslösung $u(x)$ aber als Ortskoordinate des Abschußpunktes auffassen.

Zusammenfassend kann man sagen:

Betrachtet man bei der Dgl. (1) $f(x)$ als Treffpunktskoordinate, $\lambda(x)$ als Geschoßflugzeit zum Treffpunkt eines bewegten Zieles, so stellt $\mu(x)$ die Geschoßflugzeit zum Abschußpunkt und die Näherungslösung $u(x)$ die entsprechende Ortskoordinate des Abschußpunktes dar. Beim Vorhaltschießen z. B. der Flak sind die Ortskoordinaten des Abschlußpunktes als Funktionen der Uhrzeit gegeben, falls die Ladeverzugszeit und die sogenannte tote Zeit gleich Null gesetzt werden können. Sieht man auch die Geschoßflugzeit zum Treffpunkt als gegeben an, so kann man aus den gegebenen Größen näherungsweise die Koordinaten zum Treffpunkt berechnen. In Strenge ist die Berechnung deswegen nicht möglich, weil die Koordinaten des Abschußpunktes nur bis zum aktuellen Zeitpunkt bekannt sind.

In vielen Fällen wird, wenn $u(x)$ eine Ortskoordinate des Abschußpunktes, $\lambda(x)$ die Geschoßflugzeit zum Treffpunkt und x die Uhrzeit bedeutet, für die Ortskoordinate $u(x + \lambda)$ des Treffpunktes näherungsweise

$$f(x) = u(x + \lambda) \simeq u(x) + \lambda\, u'(x)$$

auf Grund der Taylorschen Formel gesetzt.

Findet das Schießen nach den so berechneten Treffpunktskoordinaten statt, so gibt das in meiner ersten Arbeit definierte Defizit

$$-u(x) - \lambda(x) \cdot u'(x) + f(x)$$

die sogenannte Sprengpunktsablage für die betreffende Koordinate an.

Berlin. Hans Bückner. 438

[1] Die Kenntnis dieser Funktionalgleichung für die Geschoßflugzeit verdanke ich Herrn Prof. F. Raab, Karlsruhe.

Ergänzungen zu: Kamke, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen.

1. Die Differentialgleichung

$$(y^2 - b)\,y'^2 + 2\,y'(x\,y - c) + (x^2 - a) = 0.$$

Zu den Lösungen dieser Lagrangeschen Gleichung führen am besten geometrische Überlegungen. Es werde zunächst der Fall $c = 0$ betrachtet. Dann läßt sich die Gleichung in der Form schreiben:

$$(y\,y' + x)^2 = b\,y'^2 + a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Die triviale Möglichkeit $a = b = 0$ werde beiseite gelassen und der Fall $a < 0$, $b < 0$ ausgeschlossen, weil er zu nicht reellen Lösungen führen würde. Ebenso soll, wenn von den Konstanten a und b die eine verschwindet, die andere positiv sein.

Man sieht leicht, daß die Isoklinen der Differentialgleichung (1) eine doppelte Geradenschar darstellen. Daher bilden auch die Integralkurven eine doppelte Schar; die Differentialgleichung ordnet infolge ihres quadratischen Charakters jedem Punkt der x-y-Ebene zwei Richtungen y' zu. Die Steigungen der durch denselben Punkt gehenden beiden Isoklinen sind $-\frac{1}{y'}$. Demnach erhält man die Integralkurven der Differentialgleichung als orthogonale Trajektorien der Isoklinen.

Ist $a = 0$, $b > 0$, so gehen die Isoklinen der einen Schar sämtlich durch $x = 0$, $y = +\sqrt{b}$, die der anderen durch $x = 0$, $y = -\sqrt{b}$. Als Lösungskurven der Differentialgleichung

$$(y^2 - b)\,y'^2 + 2\,x\,y\,y' + x^2 = 0 \quad (b > 0) \quad . \quad (1')$$

ergeben sich also die Kreise

$$x^2 + (y \pm \sqrt{b})^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Ist $a > 0$, $b = 0$, so gehen die Isoklinen durch $x = \pm\sqrt{a}$, $y = 0$. Die Lösungskurven der Differentialgleichung

$$y^2\,y'^2 + 2\,x\,y\,y' + (x^2 - a) = 0 \quad (a > 0) \quad . \quad (1'')$$

sind die Kreise

$$(x \pm \sqrt{a})^2 + y^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

In dem allgemeinen Fall $a \neq 0$, $b \neq 0$ haben die beiden Scharen der Isoklinen eine gemeinsame Einhüllende, deren Tangenten sie also darstellen. Die Evolventen der Einhüllenden sind die orthogonalen Trajektorien der Tangenten und damit die Integralkurven der Differentialgleichung.

Faßt man (1) als die Gleichung der Isoklinen mit dem Scharparameter y' auf, so findet man nach bekannten Methoden als Gleichung der Einhüllenden

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Danach ergeben sich die Integralkurven als Evolventen von Ellipsen oder Hyperbeln. Mit Hilfe eines Parameters t schreibt sich die Gleichung der Ellipsenevolventen ($a > 0$, $b > 0$):

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{a}\cos t + \frac{\sqrt{a}\sin t}{s'}\int_{t_0}^{t} s'\,d t \\ y &= \sqrt{b}\sin t - \frac{\sqrt{b}\cos t}{s'}\int_{t_0}^{t} s'\,d t \\ \text{mit } s' &= \sqrt{a\sin^2 t + b\cos^2 t} \end{aligned}\right\} \quad (5),$$

die der Hyperbelevolventen ($a > 0$, $b < 0$):

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{a}\,\mathfrak{Cof}\, t \mp \frac{\sqrt{a}\,\mathfrak{Sin}\, t}{\sigma'}\int_{t_0}^{t} \sigma'\,d t \\ y &= \sqrt{-b}\,\mathfrak{Sin}\, t - \frac{\sqrt{-b}\,\mathfrak{Cof}\, t}{\sigma'}\int_{t_0}^{t} \sigma'\,d t \\ \text{mit} \\ \sigma' &= \sqrt{a\,\mathfrak{Sin}^2 t - b\,\mathfrak{Cof}^2 t} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6).$$

Der Fall $a < 0$, $b > 0$ liefert ein analoges Ergebnis. Das doppelte Vorzeichen entspricht den beiden Hyperbelästen. Für $t = t_0$ ergibt sich der Ort P_0 der Evolventenspitze auf der Ellipse bzw. Hyperbel. Die Werte $t > t_0$ führen zu der einen Schar der Evolventen (deren Glieder sich z. B. im positiven Sinne um den jeweiligen Anfangspunkt P_0 winden), die Werte $t < t_0$ zu der anderen Schar. Mit Hilfe einer Tafel der elliptischen Integrale lassen sich die Evolventen punktweise berechnen.

Für $b = a = r^2$ ist die Einhüllende der Isoklinen gemäß (4) ein Kreis. Die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung wird dann gegeben durch die Kreisevolventen

$$\left.\begin{aligned} x &= r\,[\cos t + (t - t_0)\sin t] \\ y &= r\,[\sin t - (t - t_0)\cos t] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Man kann sich die Frage vorlegen, wie die Differentialgleichung aussehen würde, wenn die Einhüllende geradliniger, zu den Lösungskurven orthogonaler Isoklinen die Parabel

$$y^2 = 2px$$

ist. Man findet:

$$p\,y'^2 + 2\,y\,y' + 2\,x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

mit den Lösungen (Parabelevolventen)

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{p\,t}{2\sqrt{p^2 + t^2}}\left(\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{t}{p} + C\right) \\ y &= \frac{t}{2} + \frac{p}{t}\,x \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (9).$$

Die Differentialgleichung (8) ist für $p = -2a$ identisch mit einer bei Kamke[1]) angegebenen Gleichung, deren Lösung auf dem für Lagrangesche Differentialgleichungen üblichen Wege gefunden wurde und aus (9) zu erhalten ist, wenn man t durch den Parameter $-pt = 2at$ ersetzt.

Es sei nun $c \neq 0$. Führt man dann unter Benutzung von

$$\cos^2 2\varphi = \frac{(a-b)^2}{(a-b)^2 + 4c^2}$$

$$\sin 2\varphi = \frac{2c}{a-b}\cos 2\varphi$$

die Drehung

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi \\ y &= \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

aus, so geht die Differentialgleichung in die Form (1) über:

$$(\eta\,\eta' + \xi)^2 = \beta\,\eta'^2 + \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Dabei ist

$$\alpha = \frac{a+b}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4(c^2 - ab)}{(a+b)^2}}\right)$$

$$\beta = \frac{a+b}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{4(c^2 - ab)}{(a+b)^2}}\right),$$

wo man nach Belieben die oberen oder die unteren Vorzeichen wählen kann. Man kann nun leicht angeben, wie die Lösungen bei $c \neq 0$ aussehen werden. Ist $c^2 > ab$, so haben α und β verschiedene Vorzeichen. Dann entstehen für ξ und η Lösungen in der Parameterform (6), d. h. Hyperbelevolventen. Im Falle $c^2 = ab$ ist entweder $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$; setzt man dann die andere Konstante als positiv voraus, so erhält man die Kreise (2) oder (3) als Integralkurven von (11), andernfalls nicht reelle Lösungen. Für $c^2 < ab$ sind mit a und b auch α und β entweder beide positiv oder beide negativ. Nur im ersten Falle ergeben sich reelle Lösungen, und zwar von der Gestalt (5), also Ellipsenevolventen. Die Lösungen für x und y folgen aus denen für ξ und η, wenn man die Drehung (10) rückgängig macht, d. h. ξ und η in (10) einführt.

Die hier benutzte Methode ist auf alle Gleichungen der Form

$$x + y\,y' + \varphi(y') = 0$$

anwendbar. Ihre Lösungen sind die orthogonalen Trajektorien der geradlinigen Isoklinen, und, falls die Isoklinen eine Einhüllende haben, die Evolventen der Einhüllenden.

Peenemünde, Aer. Inst. W. Heybey.

---

[1]) E. Kamke: Differentialgleichungen I, S. 362, Bspl. 1.406. Leipzig 1942.

2. Die Riccatische Dgl.

$$x y' = -\frac{1}{2} + 2 i x y + \frac{1}{2} y^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

besitzt die Lösung

$$y = \frac{-i Z_0(x) + Z_1(x)}{i Z_0(x) + Z_1(x)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

wo $Z_\nu(x)$ eine Zylinderfunktion νter Ordnung bedeutet. Durch den Ansatz

$$y = \frac{-2 x u'}{u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

erhält man die lineare Dgl. 2. Ordnung

$$u'' + \left(\frac{1}{x} - 2 i\right) u' - \frac{1}{4 x^2} u = 0 \quad . \quad . \quad (4).$$

Sie besitzt als Lösung

$$u = \sqrt{x}\, e^{i x} [i Z_0(x) + Z_1(x)] \quad . \quad . \quad (5).$$

Wählt man für die Zylinderfunktionen Hankelsche Funktionen 2. Art, so geht y über in die Funktion $T(x)$, die in der instationären Tragflügeltheorie eine Rolle spielt. Sie wurde von H. G. Küßner (Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936), S. 415, Gl. (29), (30)) eingeführt, wo auch mit leichter Abänderung die Dgl. (1) angegeben ist (Vorsicht, Druckfehler; falsches Vorzeichen). Verwandte Funktionen finden sich bei Theodorsen und Cicala. Die Dgl. (1) wurde als Grundlage für Reihenentwicklungen benutzt von L. Schwarz (Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), S. 365, Gl. (25) ff.)

Göttingen. Ludwig Schwarz.

3. Für die Differentialgleichung

$$y y''' + a y' y'' + f(y) y' = 0$$

findet man

$$y' = \pm \sqrt{C_0 + 2 \int y^{-a} (C_1 - \int y^{a-1} f(y)\, d y)\, d y}.$$

(Sonderfall: Kamke C 7.7.)

Göttingen. K. Wieghardt. 458

BUCHBESPRECHUNGEN

E. **PAWELKA,** Übungen aus der Mechanik. Berlin 1942, Springer-Verlag. 70 S. mit 59 Abb. Preis 3,60 M.

Das Büchlein wurde in der Absicht geschrieben, bei den Studierenden die Liebe zur Mechanik und deren Anwendung bei der Berufsausübung des Ingenieurs zu fördern. Es enthält eine Sammlung von 40 Übungsaufgaben, die dem Verfasser als Konstrukteur unterkamen und die der Statik, Kinematik, Kinetik, Schwingungslehre und Elastizitätslehre angehören. Leider sind sowohl die Stellung, als auch die Lösung der Aufgaben voll von Unklarheiten. Hierzu zwei Beispiele: In der 1. Übung heißt es: „Ein Differentialgetriebe hat 3 um eine gemeinsame Achse drehbare Systeme oder Zweige" . . . — gibt es ein solches Getriebe? Eine Abbildung ist nicht beigefügt. — Und in der 10. wird bei der Bestimmung des Gravitationsfeldes bei der Bewegung einer Kugel m um eine andere M ein Satz verwendet, der folgende Form hat: Absolutkraft = Führungskraft + Relativkraft, wobei als Führungskraft jene Kraft bezeichnet wird, „welche der Masseneinheit die Beschleunigung des Koordinatensystems, also die des Schwerpunktes S von m erteilt". Es muß bezweifelt werden, ob diese Art, Mechanik zu treiben, der an sich begrüßenswerten Absicht des Verfassers gerecht zu werden vermag.

Karlsruhe i. B. Th. Pöschl. 428.

Dr. WILHELM **MÜLLER,** Prof. a. d. Univ. München, Einführung in die Mechanik des Fluges. 2. neubearb. Aufl. 146 S. m. 76 Abb. Leipzig 1942, Dr. Max Jänecke Verlagsbuchhandlung. Preis brosch. 3,80 M.

Das Buch gibt in sechs Abschnitten einen Überblick über die Elemente der Flugmechanik. Es wendet sich in erster Linie an Studierende; es ist daher im allgemeinen von der Benutzung höherer mathematischer Hilfsmittel abgesehen. So wird z. B. bei der Behandlung des Auftriebes die Methode der konformen Abbildung nicht benutzt. Im einleitenden Abschnitt sind die Grundgesetze der Aerodynamik wiedergegeben. Die nächsten Abschnitte behandeln Bewegungszustände und Bewegungen des Flugzeugs. In einfacher Weise werden die Gleichungen für Steig-, Reise-, Gleit- und Segelflug abgeleitet und erläutert, anschließend die instationären Vorgänge (Start, Landung, Sturzflug, Abfangen) untersucht. Die letzten Kapitel behandeln die statische und dynamische Längsstabilität und die Seitenbewegung des Flugzeugs.

Die Darstellung ist knapp mit Ausnahme der Behandlung der Probleme, an denen der Verfasser selbst forschend gearbeitet hat. Der Leser, der sich in die Mechanik des Fluges einführen lassen will, kann aus dem Büchlein manche Anregung schöpfen. Es wäre zu wünschen, daß im Text einige Unklarheiten (z. B. Erklärung der Begriffe Potential, Zirkulation usw.) und Unrichtigkeiten ausgemerzt würden.

Göttingen. J. Stüper. 441

Dr. phil. BRUNO **TIEDEMANN,** Über Bodenuntersuchungen bei Entwurf und Ausführung von Ingenieurbauten. 2. verb. Aufl. 40 S. m. 22 Abb. und 5 Tafeln. Berlin 1942, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. Preis brosch. 2 M.

Daß das Heft von Tiedemann über Bodenuntersuchungen, dessen erste Auflage ich in Bd. 21 (1941, S. 318) dieser Zeitschrift ausführlicher besprochen habe, in so kurzer Zeit eine zweite Auflage gefunden hat, beweist seine Notwendigkeit. Da Tiedemann einen ausführlicheren Leitfaden in Aussicht gestellt hat, war eine umfangreichere Ergänzung des Heftchens nicht zu erwarten. Wegen der Bedeutung für neuzeitliche Erdverdichtungsgeräte ist auf die Bedeutung der „Klebegrenze" neu hingewiesen worden. Das Heft wird bis zum Erscheinen des Leitfadens die früher vorhandene Lücke weiter ausfüllen.

Naumburg (Saale). Dr. Scheidig. 442

Dr. KARL **ULLER,** a. o. Prof. a. d. Universität Gießen, Idee und Begriff der Welle, ein Leitfaden durch die physikalische Grundlagen-Forschung des Verfassers. 62 S. m. 1 Abb. Berlin 1942, Dr. Georg Lüttke Verlag. Preis brosch. 4,50 M.

Die Schrift bietet eine Einführung in die bereits in einer Reihe früherer Veröffentlichungen dargestellten Gedanken des Verf. über die Behandlung

der Wellenbewegungen. Im ersten Teil unterwirft er die in der theoretischen Physik übliche Darstellung von Wellenvorgängen einer kritischen Betrachtung und faßt die ihr anhaftenden Mängel zusammen. Im zweiten Abschnitt begründet er dann die von ihm geschaffene „Reine Wellenkinematik" und setzt sich mit den Wellenbeschreibungen von Einstein, de Broglie, Schrödinger und Heisenberg auseinander. Im letzten Abschnitt schließlich gibt er Hinweise auf die Bedeutung seiner Auffassung des Wellenbegriffs für die Deutung der physikalischen Erscheinungen. Im übrigen sei auf die Besprechung seines früher erschienenen Buches „Die Entdeckung des Wellenbegriffs" in dieser Zeitschrift Bd. 18 (1938), S. 203, hingewiesen.

Berlin. E. Mosch. 463

HEINRICH **DÖRRIE,** Grundriß der Physik, mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. 2., ergänzte Aufl. XII + 854 S. m. 464 Fig. Breslau 1942, Verlag Ferdinand Hirt. Preis geb. 19,50 M.

Die erste Auflage des Buches wurde in dieser Zeitschrift, Bd. 20 (1940), S. 366, gewürdigt. In der neuen Auflage hat der Verfasser neben kleinen Verbesserungen und einigen durch die Fortschritte der Forschung veranlaßten Änderungen an neuen Stoffen solche behandelt, die in der heutigen Physik und Technik erhebliche Bedeutung erlangt haben, wie die Erscheinungen des Ultraschalls, die Temperaturerniedrigung im Bereiche tiefster Temperaturen durch magnetische Abkühlung, das Elektronenmikroskop, die Frequenzstabilisierung durch Schwingquarz u. a. m. Das Buch gewährt damit einen recht guten Einblick in den gegenwärtigen Stand der physikalischen Forschung.

Berlin. E. Mosch. 462

Dr. FRITZ **SAUTER,** Prof. a. d. Techn. Hochschule München, Differentialgleichungen der Physik. (Sammlung Göschen Bd. 1070). 147 S. m. 16 Fig. Berlin 1942, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

Das Bändchen will eine Brücke schlagen von der mathematischen Theorie der Differentialgleichungen zu den praktischen Anwendungen in der Physik. Ausgehend von konkreten physikalischen Problemen werden an der Hand von gewöhnlichen Differentialgleichungen der Mechanik und von partiellen Gleichungen der Akustik, Optik, Wellenmechanik, der Potentialtheorie und der Wärmeleitung — also durchgehend linearen Gleichungen — eine Reihe von Lösungsmethoden entwickelt. Insbesondere wird am Schluß kurz auf die Methoden der Störungstheorie eingegangen.

Dem Verf. gelingt es so ausgezeichnet, dem Leser die verschiedenen Integrationsmethoden im Prinzip verständlich zu machen und ihm an den zahlreichen Beispielen ein gewisses Maß an Rechentechnik zu vermitteln. Dabei setzt er nur geringe Vorkenntnisse voraus, verzichtet z. B. auf die Anwendung funktionentheoretischer Methoden, stellt allerdings an die Mitarbeit des Lesers bei der starken Konzentration der Darstellung recht beträchtliche Anforderungen.

Dresden. Willers. 460

Prof. Dr. BERNHARD **BAULE,** Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. I, Differential- und Integralrechnung. VIII + 158 S. m. 161 Abb. Leipzig 1942, Verlag S. Hirzel. Preis kart. 7 M.

Das Buch will dem Naturforscher und Ingenieur das Hilfsmittel der Differential- und Integralrechnung in die Hand geben. Diesen Zweck erfüllt es in ausgezeichneter Weise. Der Stoff ist klar und übersichtlich angeordnet, die Darstellung schwungvoll und leicht verständlich. Immer wieder stößt man beim Lesen auf Beweise für das didaktische Geschick des Autors.

Der Inhalt gliedert sich so, daß nach einer ausführlichen Einführung des Funktionsbegriffes zunächst die Differentialrechnung einer Funktion einer Veränderlichen entwickelt wird, dann die einer Funktion von mehreren Veränderlichen; daran schließt sich die Integralrechnung. Begreiflicherweise sind Existenzbeweise häufig weggelassen bzw. durch Hinweis auf den geometrischen Sachverhalt ersetzt. Im übrigen vereinigt das Buch mathematische Strenge und Verständlichkeit in glücklichster Weise. (Mir ist nur eine Stelle aufgefallen, wo man eine präzise Formulierung vermißt, beim Funktionsbegriff. Der in Abbildung 5 gezeichnete Kurvenzug enthält Strecken parallel zur y-Achse, sollte also nicht als Bild einer Funktion $y = f(x)$ genannt werden.) Sehr erfrischend wirkt es, daß der Autor nicht vor Improvisationen zurückschreckt, z. B. in der Verwendung von Vektor und Determinante. (In der Bezeichnungsweise geht das vielleicht gelegentlich zu weit, z. B. wenn die Gesamtheit der natürlichen Zahlen als Zahlkörper bezeichnet wird oder in der Verwendung des Wortes Matrix.)

Nützlich wären gelegentliche Literaturhinweise, insbesondere auch auf numerische Methoden, die vielleicht etwas zu knapp dargestellt worden sind.

Das Erscheinen des Buches, gerade in diesem Zeitpunkt, wird auch von den Studenten mit größter Freude begrüßt werden.

Dresden. Rellich. 433

Prof. Dr. BERNHARD **BAULE,** Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. II, Ausgleichs- und Näherungsrechnung. 54 S. m. 30 Abb. Leipzig 1943, Verlag S. Hirzel. Preis kart. 2,80 M.

Das zweite Bändchen des Werkes ist in der Hauptsache Fragen der angewandten Mathematik gewidmet, und zwar gibt es eine Einführung in die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, behandelt die Gaußsche Häufigkeitsverteilung, die Darstellung von Kurven durch einfachere, Fouriersche Reihen und Integrale, Legendresche Polynome als weiteres Beispiel für ein System orthogonaler Funktionen und schließlich kurz die Newtonsche und die Lagrangesche Interpolationsformel.

Was vom ersten Teil gesagt wurde, gilt auch vom zweiten. Man freut sich über die klare, übersichtliche und leicht verständliche Darstellung und wird das geschickt geschriebene Heftchen gern dem Studenten zur Anschaffung empfehlen. Einige Versehen (z. B. die Gleichsetzung von glatt und monoton) lassen sich leicht bei einer sicher bald nötig werdenden Neuauflage beseitigen. Wünschenswert wäre es, wenn dann auch mehr weiterführendes Schrifttum angegeben würde.

Dresden. Willers. 459

Dr.-Ing. FRIEDRICH **KLINGER,** Einführung in die n-dimensionale algebraische Geometrie, mit besonderer Berücksichtigung der Physik für Techniker und Physiker. Herausgeg. mit Unterstützung der Akademie der Wissenschaften in Wien. VII + 152 S. m. 1 Tafel. Wien 1942, Springer-Verlag. Preis brosch. 12 M.

Der Verfasser will lt. Vorwort mit diesem Buch die Kluft überbrücken, die nach seiner Ansicht zwischen Technikern und Physikern besteht, indem die Techniker meistens flinke Rechner sind, aber selten den hohen Ansprüchen der theoreti-

schen Physik gewachsen sind, während bei den Physikern fast immer das Umgekehrte der Fall ist. Dieser Zweck soll durch eine kurze Zusammenstellung von Definitionen und Lehrsätzen über Grundbegriffe aus den Gebieten der Mathematik, Geometrie und Physik erreicht werden. Auf die Ableitungen und Beweise wird vielfach verzichtet. Vorausgesetzt werden nur geringe Kenntnisse in der Mathematik, wie sie in jeder Mittel- und Gewerbeschule gelehrt werden.

Das erste Kapitel (18 S.) behandelt die Zahlen und die verschiedenen Rechnungsarten. Kapitel II (27 S.) mit der Überschrift „Die Skalare. Einführung in die Physik" befaßt sich im wesentlichen mit den Maßsystemen. Kapitel III (18 S.) bringt die Definitionen und wichtigsten Formeln aus der Kombinationslehre. Das Hauptstück des Buches, Kapitel IV (69 S.), enthält die Begriffe, Regeln und Sätze der Graßmannschen Ausdehnungslehre. Es ist sicher sehr verdienstlich, daß der Verfasser versucht, diese außerhalb des Kreises der Fachmathematiker fast unbekannte Lehre dem Techniker und Physiker näherzubringen. Wem die Vektorrechnung schon geläufig ist, dem wird es auch keine besondere Schwierigkeit machen, an Hand des Buches die Graßmannsche Lehre im n-dimensionalen Raum zu verstehen. Für einen Anfänger ohne solche Vorkenntnisse ist sie reichlich abstrakt. Das Schlußkapitel (10 S.) hat die Überschrift „Die extensiven Größen des n-dimensionalen Raumes. Einführung in die geometrische Physik". Diese Größen unterscheiden sich von den im vorhergehenden Kapitel betrachteten geometrischen Größen dadurch, daß sie als weiteres Kennzeichen eine physikalische Dimension besitzen.

Wie aus der vorstehenden Übersicht hervorgeht, enthält das Buch eine etwas unorganische Auswahl von Begriffen und Lehrsätzen aus verschiedenen Gebieten. Wenn der Verfasser im Schlußwort meint, „damit wären wir mit dem mathematischen Grundbau des gesamten Lehrgebäudes der algebraischen Geometrie bzw. der geometrischen Physik fertig", so wird man dieser Auffassung nicht ganz beipflichten. Immerhin darf man dem Buch nachrühmen, daß es auf beschränktem Raum ein Fülle nützlicher Kenntnisse vermittelt.

Berlin. K. W. Wagner. 455

RÜHLMANN-SCHMIEDEL, Vierstellige Logarithmen- und Zahlentafel. 17., völlig neu bearb. Aufl. 104 S. Leipzig 1943, Julius Klinkhardt Verlagsbuchhandlung. Preis kart. 2,20 M.

Für den Schulgebrauch bestimmte Logarithmen- und Zahlentafeln mit umfangreichen astronomischen, geographischen, physikalischen und chemischen Tabellen. Unter anderem werden vierstellige Logarithmen vierstelliger Zahlen gegeben. Angehängt ist eine mathematische Formelsammlung, die der verbessernden Durchsicht bedürfte; z. B. sollten die trigonometrischen Funktionen nicht nur für den ersten Quadranten definiert werden; die Kurve $y = m \cdot e^{x}$" bezeichnet man nicht als logarithmische Kurve; der Satz „Die Funktion $y = f(x)$ hat für den Wert $x = a$ einen Wendepunkt, wenn $f''(a) = 0$" bedürfte einer ergänzenden Aussage über den Wert von $f'''(a)$, usw.

Dresden. Willers. 432

OSKAR **BOLZA,** Aus meinem Leben. 49 S. München 1936, Verlag Ernst Reinhardt. Preis brosch. 1,50 M.

Oskar Bolza, geb. 12. Mai 1857 in Bergzabern (Rheinpfalz), gest. 5. Juli 1942 in Freiburg i. Br., ist allen Mathematikern durch sein Lehrbuch über Variationsrechnung bekannt. Von seiner Hand geschrieben liegt hier eine Skizze seines Lebens vor, im wesentlichen unter Beschränkung auf die Darstellung des mathematischen Entwicklungsganges.

Bolza hat in Straßburg, Berlin und Göttingen studiert. Von entscheidendem Einfluß war für ihn das Sommersemester 1879, in dem er bei Weierstraß Variationsrechnung hörte. Promoviert hat er 1886 in Göttingen bei Klein. Zwei Jahre später fuhr er nach Amerika und hat dort bis 1910 gewirkt, von 1892 ab in Chicago zusammen mit H. Maschke und E. H. Moore. Bolza kehrte 1910 in seine Heimat zurück und las in Freiburg als Honorarprofessor bis 1932.

Die Schrift ist mit liebenswürdiger Bescheidenheit verfaßt. Besonderes Interesse dürfte die Schilderung seines Amerikaaufenthaltes haben; sie fällt in eine Zeit, die für die Pflege der Mathematik in den Vereinigten Staaten von großer Wichtigkeit war. — Bolza streift auch sein Interesse für religiöse und mystische Fragen, das sich in zwei Büchern ausgedrückt hat: „Glaubenslose Religion" und „Meister Eckehart als Mystiker. Eine religionspsychologische Studie."

Dresden. Rellich. 444

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr.-Ing. P. **WERKMEISTER,** o. Prof. em. a. d. Techn. Hochschule Dresden, Vermessungskunde II, Messung von Horizontalwinkeln, Festlegung von Punkten im Koordinatensystem, Absteckungen. (Sammlung Göschen Bd. 469.) 151 S. m. 93 Fig. Berlin 1942, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

Dr. phil. Dr. techn. FRITZ **CHMELKA,** wiss. Assistent a. d. Techn. Hochschule Wien, und Dipl.-Ing. Dr. techn. ERNST **MELAN,** o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Wien, Einführung in die Statik. VII + 132 S. m. 119 Textabb. Wien 1942, Springer-Verlag. Preis brosch. 6,60 M.

Dr. GERHARD **KOWALEWSKI,** Prof. a d. Deutschen Karls-Universität Prag, Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholmschen Determinanten. 3., verb. u. erweit. Aufl. 320 S. Berlin 1942, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 15 M.

GUSTAV **HÖSSJER,** Über die konforme Abbildung eines veränderlichen Bereiches (Chalmers Tekniska Högskolas Handlingar, Transactions of Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden, Nr. 10/1942.) 15 S. Göteborg 1942, N. J. Gumperts Bokhandel A.-B. Preis 2 Kronen.

Die Tätigkeit der Baltischen Geodätischen Kommission in den Jahren 1938—1941. Berichtet von dem Präsidium. 113 S. Helsinki 1942, Osakeyhtio Weilin & Göös, Aktiebolag.

Dr.-Ing. Dr. techn. E. **RAUSCH,** a. pl. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin, Maschinenfundamente und andere dynamische Bauaufgaben, 3. Teil Rahmenfundamente bei hoher Maschinendrehzahl (insbesondere Dampfturbinenfundamente), Aufstellung von Maschinen in Gebäuden, Werkzeugmaschinen, Schäden an Maschinenfundamenten und Erschütterungsschäden anderer Art, andere dynamische Aufgaben im Bauwesen nebst Ergänzung zum 1. und 2. Teil des Buches. 365 S. m. 377 Bildern. Berlin 1942, VDI-Verlag. Preis brosch. 35 M.

NACHRICHTEN

David Hilbert †.

Mit Hilbert verlor die Welt den größten Mathematiker, den sie seit Gauß gehabt hat. Hilbert war groß durch den Umfang und die Vielseitigkeit seiner Entdeckungen, die von der Algebra und der Zahlentheorie über Geometrie und Analysis bis zu den Anwendungen hin einerseits und bis zu den tiefsten Forschungen über die Grundlagen seiner Wissenschaft andererseits überall wesentlich Neues gegeben haben, so noch einmal die Mathematik als ein Ganzes erscheinen lassend; Hilbert war groß durch die tiefschürfende Kraft und revolutionierende Wirkung seiner Forschungsmethoden; Hilbert war groß durch die unanfechtbare Strenge seiner Beweisführung, die klassisch geworden ist.

Hilbert wurde am 23. Januar 1862 zu Königsberg aus einer Juristenfamilie geboren. In Königsberg studierte er auch, war Schüler von H. Weber und Lindemann, promovierte und habilitierte sich, wurde außerordentlicher und bald auch ordentlicher Professor. Früh erwarb er Ruhm durch den Beweis der Endlichkeit des Invariantensystems und andere algebraische Arbeiten. Der weitblickende und großzügige Felix Klein holte den 33-jährigen nach Göttingen, wo nun Hilbert bis zu seinem Tode (am 14. Februar 1943) eine erstaunliche Tätigkeit entfaltete, die ihn nicht etwa nur als stillen für sich schaffenden Gelehrten zeigte, sondern auch als den großen Anreger, der unbekümmert schenkte und eine große Schülerzahl aus der ganzen Welt um sich sammelte. Durch die „Probleme der Mathematik", die er auf dem internationalen Mathematikerkongreß in Paris 1900 vortrug, wurde er Lehrmeister der ganzen mathematischen Welt.

Sein zweites großes Arbeitsgebiet wurde die Zahlentheorie. Der „Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper" vom Jahre 1897 stellt sich Gauß' Disquisitiones arithmeticae würdig zur Seite. Andere Arbeiten über den Gegenstand folgten; die vollständige Lösung des Waringschen Problems ist eine weitere schöne Leistung.

1899 begannen dann nach einer vorhergehenden kleineren aber sehr hübschen Arbeit über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte die Untersuchungen über die „Grundlagen der Geometrie". Sie erregten mit Recht das größte Aufsehen. Denn hier wurde mit aller Schärfe wohl zum ersten Male die axiomatische Methode in der Geometrie und damit in der Wissenschaft überhaupt ganz klar herausgestellt: für den mathematischen Aufbau einer Wissenschaft kommt es nur auf die logischen Verknüpfungen der vorangestellten Axiome an, nicht auf deren reale oder anschauliche Bedeutung. Kleine Geister haben daraufhin Hilbert dahin mißverstanden, als vertrete er einen extrem nominalistischen Standpunkt: man könne irgendwelche Spielregeln vereinbaren, ganz gleichgültig welche, müsse nur streng logisch weiterschließen und die Widerspruchslosigkeit beweisen. Hilbert hat es besser gewußt; seine axiomatische Methode war auch für ihn nur eine Seite der Sache; das Kantzitat: „so fängt denn alle menschliche Erkentnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen", das er seinen „Grundlagen der Geometrie" voranstellte, und der Geometer Hilbert, der die prachtvolle Vorlesung über anschauliche Geometrie gehalten hat, hätte die Dogmatiker des Konventionalismus eines Besseren belehren können.

Kurz nach der Jahrhundertwende beginnen nun Hilberts große Untersuchungen zur Analysis. 1901 bringt seine Arbeit über das „Dirichletsche Prinzip", in der es ihm gelingt, mit einer unvergleichlichen Kraft die Schwierigkeiten, die sich einer strengen Begründung dieses an sich so schönen und einfachen Prinzips entgegenstellen, zu überwinden. 1904 bis 1910 kommen dann die ebenso bedeutungsvollen Untersuchungen zur Theorie der Integralgleichungen, in denen Hilbert das Werkzeug der unendlich vielen Variabeln und damit den Hilbertschen Raum schafft. Unvergleichlich ist, wie er hier mit aller Strenge Probleme meistert, an die sich wohl sonst niemand herangewagt hätte. Er hat damit methodisch der Mathematik die schärfsten Hilfsmittel geliefert.

Gerade auch die angewandte Mathematik ist hier Hilbert zu größtem Dank verpflichtet, nicht etwa nur wegen einiger Probleme, die er gelöst hat, sondern wegen der weittragenden Methoden. Die sogenannten direkten Methoden der Variationsrechnung nehmen von Hilbert ihren Ausgangspunkt und bilden heute ein Hilfsmittel, das die Praxis nicht mehr entbehren kann.

Die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie mußten einen Geist von der umfassenden Kraft Hilberts notwendig weiterführen. Die Widerspruchslosigkeit der Euklidischen und anderer Geometrien konnte durch Arithmetisierung nachgewiesen werden. Aber sind die Sätze der Arithmetik selbst widerspruchslos? Diese Frage mußte sich erheben, zumal die sogenannten Paradoxien der Mengenlehre darauf aufmerksam gemacht hatten, daß man nicht ganz willkürlich ins Blaue hinein Begriffssysteme aufbauen kann. Ist die Arithmetik ein unbedingt zuverlässiges Begriffssystem? Diese Frage führte Hilbert zu der kühnen Idee, die Arithmetik selbst als widerspruchsfrei dadurch nachzuweisen, daß sie formalisiert wird, d. h. daß eine Metamathematik geschaffen wird, deren Symbole Begriffe, auch so bedenkliche wie den Begriff Unendlich, durch eine endliche überschaubare Anzahl von Zeichen mit endlicher Verknüpfungsmöglichkeit darstellen, so daß die Widerspruchslosigkeit direkt zu erkennen wäre. Auch der Widerspruch muß eine bestimmte Formel erhalten, und es bleibt zu zeigen, daß diese Widerspruchsformel zwischen den Zeichen nie auftreten kann. Die Durchführung dieses gewaltigen Gedankens hat uns Hilbert, trotz weitgehender Ergebnisse seiner selbst und seiner Schüler unvollendet hinterlassen müssen. Doch liegt vielleicht gerade in diesem fast Übermenschlichen, das er gewollt und mit Erfolg angegriffen hat, das stärkste Zeugnis seiner Größe. Hamel. 477

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. —

— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.